

# 双体小行星系统平衡态与稳定性研究

杜燕茹<sup>1,2</sup>, 李翔宇<sup>1,2</sup>, 韩宏伟<sup>1,2</sup>, 乔 栋<sup>1,2</sup>

(1. 北京理工大学宇航学院, 北京 100081;

2. 深空自主导航与控制工信部重点实验室, 北京 100081)

**摘 要:** 由于双体小行星独特的运动形式可为行星的演化提供重要线索, 因而成为小行星探测中的热点目标。基于双椭球体模型研究了双小行星系统的相对运动、平衡态及稳定性。首先基于双椭球的全二体模型建立了双星系统相对运动的动力学方程; 其次利用拉格朗日方程, 通过求解系统角动量和能量, 建立了双星系统平衡态对应的状态约束; 最后给出了通过零速度状态曲面判断双星系统平衡态稳定性的一般性方法, 在此基础上分析了小行星物理参数变化对系统平衡态稳定性的影响。研究可为未来双体小行星系统探测任务中的轨道设计与控制提供重要的理论参考。

**关键词:** 双体小行星系统; 双椭球模型; 平衡态; 稳定性

中图分类号: V412.4

文献标识码: A

文章编号: 2095-7777(2019)05-0456-07

DOI: 10.15982/j.issn.2095-7777.2019.05.006

**引用格式:** 杜燕茹, 李翔宇, 韩宏伟, 等. 双体小行星系统平衡态与稳定性研究[J]. 深空探测学报, 2019, 6(5): 456-462.

**Reference format:** DU Y R, LI X Y, HAN H W, et al. Study on equilibrium and stability of binary asteroid systems[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2019, 6(5): 456-462.

## 引 言

作为小行星的重要存在形式, 双体小行星在近地小行星、主带小行星与特洛伊小行星中都被观测到<sup>[1]</sup>。在近地小行星中, 双体小行星的数量约占到其总数的 $15\pm 4\%$ <sup>[2-3]</sup>。由于双体小行星系统中天体间所具有的独特运动特性可为研究行星系统的演化提供重要线索, 因而成为目前小行星探测的热点目标。双体小行星模型的不确定性及其附近复杂多变的动力学环境对双体小行星探测任务的设计提出了挑战。

近年来双体小行星的稳定特性及其附近复杂的轨道动力学问题引起了学者们的广泛关注。Scheeres<sup>[4]</sup>基于全二体模型在双体小行星能量与角动量守恒条件下, 研究了双体小行星系统旋转运动与平移运动中能量与角动量的转换关系, 并给出了双体小行星系统Hill稳定性准则和发生碰撞的条件。基于球和椭球构成的双体小行星系统, Scheeres提出了评估平衡状态下能量稳定性与谱稳定性的方法<sup>[5]</sup>。Bellerose等基于椭球-球构成的全二体问题<sup>[6-7]</sup>, 研究了相对平衡状态与稳定性问题, 推导了稳定性的解析判据, 并针对对不同构型下的双体小行星系统求解出了稳定区域, 研究

发现: 与限制性三体问题中的稳定区域相比, 椭球体-球体系统的稳定范围更小<sup>[8]</sup>。

本文在前人研究的基础上, 通过将椭球体与球体模型拓展至双椭球体模型构成的全二体问题, 研究了双体小行星系统的平衡态及稳定性, 并分析了不同物理参数对双体小行星平衡态稳定性的影响, 将为未来小行星探测提供理论基础。

## 1 双体小行星动力学与运动方程

### 1.1 全二体问题

全二体问题研究两个主天体在考虑形状因素以及质量分布的情况下, 受相互引力作用而进行的运动, 且运动被限制在一个平面内, 如图1所示。其中,  $O$ 点为系统的质心,  $P_1$ 和 $P_2$ 为构成双体小行星系统的两个形状任意、质量分别为 $M_1$ 与 $M_2$ 的主天体。在该双体小行星系统中, 分别引入惯性坐标系 $OXYZ$ 与旋转坐标系 $Oxyz$ 。惯性坐标系 $OXYZ$ 的坐标原点为双体小行星系统质心 $O$ ,  $X$ 轴指向惯性空间的固定方向,  $Z$ 轴指向主天体轨道运动的角动量方向,  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$ 轴构成右手坐标系。旋转坐标系 $Oxyz$ 的坐标原点为系统质心 $O$ ,  $x$ 轴由主天体 $P_1$ 质心指向主天体 $P_2$ 质心,  $z$

轴指向主天体轨道运动的角动量方向,  $x$ 、 $y$ 、 $z$  构成右手坐标系。此外, 分别以小行星的质心为原点建立小行星本体坐标系, 选取本体系的  $x_i$ 、 $y_i$  和  $z_i$  ( $i=1, 2$ ) 轴与小行星主轴方向一致, 其中  $z_i$  轴垂直于轨道面<sup>[9]</sup>。假设双体小行星系统质心  $O$  的运动相对于小行星间的相对运动可忽略, 且小行星仅围绕惯性主轴进行自旋, 因此, 双体小行星间的相对运动可简化为用参数  $r$ 、 $\phi_i$  ( $i=1, 2$ ),  $\theta$  表示的四自由度问题, 其中  $r$  为两小行星质心间的距离,  $\phi_i$  ( $i=1, 2$ ) 为小行星本体系  $x_i$  ( $i=1, 2$ ) 轴与小行星质心连线的夹角,  $\theta$  为质心连线相对于惯性系的旋转角度。

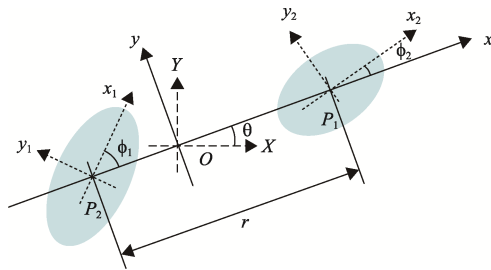


图1 平面全二体问题示意图  
Fig. 1 Planar full two-body problem

## 1.2 双体小行星系统势能与动能

对于空间全二体问题, 惯性系中双体小行星系统的势能为<sup>[5]</sup>

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = -\frac{GM_1M_2}{|\mathbf{r}|} \left\{ 1 + \frac{1}{2|\mathbf{r}|^2} \text{Tr}(\bar{\mathbf{I}}) - \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{r}}{2|\mathbf{r}|^4} \right\} \quad (1)$$

方程(1)给出了将惯性矩阵展开至二阶形式的系统势能。其中:  $\text{Tr}(\bar{\mathbf{I}}) = \text{Tr}(\bar{\mathbf{I}}_1) + \text{Tr}(\bar{\mathbf{I}}_2)$ ,  $\text{Tr}$  表示矩阵的迹;  $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_1^T \cdot \bar{\mathbf{I}}_1 \cdot \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2^T \cdot \bar{\mathbf{I}}_2 \cdot \mathbf{A}_2$ ;  $\mathbf{r}$  为两个小天体质心在惯性系中的相对位置矢量;  $\bar{\mathbf{I}}_i = \mathbf{I}_i/M_i$  ( $i=1, 2$ ) 为单位化后的惯性矩阵,  $M_i$  ( $i=1, 2$ ) 为两个小天体的质量;  $\mathbf{A}_i$  ( $i=1, 2$ ) 为由惯性坐标系转换至小天体本体系的旋转矩阵。对于椭球体模型, 假设质量均匀分布且椭球体的半长轴分别为  $\alpha_i > \beta_i > \gamma_i$  ( $i=1, 2$ ), 则绕主轴的惯性矩可以表示为

$$\begin{cases} I_{ix} = \frac{1}{5} M_i (\beta_i^2 + \gamma_i^2) \\ I_{iy} = \frac{1}{5} M_i (\alpha_i^2 + \gamma_i^2) \\ I_{iz} = \frac{1}{5} M_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2) \end{cases} \quad (2)$$

根据系统动能的一般性表达形式, 在惯性系  $OXYZ$  中可以推导得到双体小行星系统的动能, 在假设主天体的旋转仅围绕主惯性矩发生的前提下, 系统

动能在旋转坐标系下的表达式为

$$T = \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1}{2} I_{iz} \dot{\phi}_i^2 + \frac{1}{2} I_{iz} \dot{\theta}^2 + \dot{\theta} I_{iz} \dot{\phi}_i \right) + \frac{1}{2} (m\dot{r}^2 + mr^2 \dot{\theta}^2) \quad (3)$$

其中  $m = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ ,  $I_{iz}$  ( $i=1, 2$ ) 表示小天体绕自转轴的惯性矩。

系统的能量可以表示为  $E = T + V$ 。

## 1.3 双体小行星系统运动方程

对于双体小行星系统等经典物理系统, 定义拉格朗日量  $L$  为系统动能与系统势能之差, 即

$$L = T - V \quad (4)$$

选取两主天体质心间的相对距离  $r$ 、双体小行星系统角速度  $\dot{\theta}$  以及主天体相对于旋转坐标系的旋转角度  $\phi_i$  用于表示平面全二体问题中的运动方程。

对于  $\mathbf{q} = [r, \theta, \phi_1, \phi_2]$ , 根据拉格朗日方程  $\partial L / \partial \mathbf{q}_i = d(\partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}_i) / dt$ , 可得双体小行星系统的运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{r} = \dot{\theta}^2 r - \frac{1}{m} V_r \\ \ddot{\phi}_1 = -\left(1 + \frac{mr^2}{I_{1z}}\right) \frac{1}{mr^2} V_{\phi_1} - \frac{1}{mr^2} V_{\phi_2} + 2 \frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} \\ \ddot{\phi}_2 = -\left(1 + \frac{mr^2}{I_{2z}}\right) \frac{1}{mr^2} V_{\phi_2} - \frac{1}{mr^2} V_{\phi_1} + 2 \frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{mr^2} V_{\phi_1} + \frac{1}{mr^2} V_{\phi_2} - 2 \frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} \end{cases} \quad (5)$$

## 2 双椭球体系统平衡态与稳定性分析

### 2.1 双椭球体系统平衡态的状态约束

在求解双体小行星系统平衡态对应的约束方程时, 角动量是其中的一个关键参数。分析式(1)与式(3)中的双体小行星系统动能表达式与势能表达式可发现, 系统势能与动能的值与双体小行星系统旋转角度  $\theta$  无关, 即双体小行星系统角动量守恒, 角动量  $K$  的表达式为

$$K = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = (I_{1z} + I_{2z} + mr^2) \dot{\theta} + I_{1z} \dot{\phi}_1 + I_{2z} \dot{\phi}_2 \quad (6)$$

求解双体小行星系统的平衡状态通常将全二体问题运动学方程中关于时间求导数的变量设为零, 可求解平衡状态所满足的约束。因此双体小行星系统处于平衡状态的条件为, 系统能量  $E = T + V$  需满足对各变量求偏导的值均为零。

由于式(1)的势能表达式仅适用于平面全二体问题, 因此系统的能量表达式仅适用于平面全二体问题。平面全二体问题的平衡态需满足的约束为

$$\begin{cases} E_r = -mr \frac{K^2 - (I_{1z}\dot{\phi}_1 + I_{2z}\dot{\phi}_2)^2}{I_z^2} + V_r = 0 \\ E_{\phi_i} = V_{\phi_i} = 0 \\ E_r = m\dot{r} = 0 \\ E_{\phi_i} = I_{iz}\dot{\phi}_i - \frac{I_{iz}(I_{1z}\dot{\phi}_1 + I_{2z}\dot{\phi}_2)}{I_z} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

通过式(6)中的4个约束可以确定双体小行星系统平衡状态应满足的3个约束方程为

条件①:  $\dot{r}^* = \dot{\phi}_i^* = 0$ ;

条件②:  $\phi_i^* = 0, \pm\pi/2, \pi$ ;

条件③:  $E_r = 0$ 。

本文仅考虑  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  的条件下, 双体小行星系统的相对运动情况。此时相对平衡态下对应的双体小行星系统角动量平方的值  $K_0^2$  与系统能量的大小  $E_0$  可以分别从式(6)计算得出。

## 2.2 双椭球体系统平衡态稳定性的分析

在进行双体小行星系统平衡态稳定性分析之前, 首先需要引入系统零速度状态的概念, 也即两天体相对运动为零时状态变量构成的等式约束。将相对平衡状态  $r_0$  处的双体小行星系统能量  $E_0$  与角动量的平方  $K_0^2$  带入零速度状态公式, 且将平衡状态对应的距离  $r_0$  作为参数, 可以获得双体小行星系统运动可达范围的控制方程。由零速度状态公式推导得到的控制方程为

$$A\left(\frac{r}{r_0}\right)^5 + B\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 + D\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 + E\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + F\left(\frac{r}{r_0}\right) + G \geq 0 \quad (8)$$

其中,  $A \sim G$  为该五次方程的各阶系数, 受小行星质量分布以及平衡状态时两小行星的距离  $r_0$  的影响。计算验证式(7)的五次方程有二重根  $r = r_0$ , 故可因式分解得到简化的控制方程为

$$A\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 + (2A + B)\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + 2G\left(\frac{r}{r_0}\right) + G \geq 0 \quad (9)$$

利用劳斯-赫尔维茨判据可得结论: 当式(8)中  $A > 0$  时, 该方程的根均分布在复平面的左半平面; 当  $A < 0$  时该方程在复平面的右半平面有一个根, 即存在一个正实根。对该三次不等式进行讨论研究, 可获得双体小行星系统平衡态稳定性的3种情况: ①运动可达范围无上界的不稳定平衡态; ②运动可达范围有上界的不稳定平衡态; ③稳定的平衡态。

由于平衡态的稳定性本质上关注的是能量稳定性与Hill稳定性。能量稳定性为一类基础的稳定性类型, 决定了系统能否通过能量耗散的方式达到能量较

低的状态。双体小行星系统具有能量稳定性意味着该双体小行星系统已达到在给定角动量下能量最低的构型状态。Hill稳定性描述双体小行星系统在相互引力作用下是否具有发生逃逸能力的稳定性, 与能量稳定性相比, Hill稳定性研究对象不是平衡状态附近的运动, 而是关注双体小行星系统运动的绝对界限。所以以上3种平衡态稳定性根据其参数特性又可归结为: ①Hill不稳定平衡态; ②Hill稳定、能量不稳定平衡态; ③能量稳定平衡态。下面对这3类稳定平衡态分别进行分析。

### 1) Hill不稳定平衡态

$A > 0$  时, 不等式的根均分布于复平面的左半平面, 则式(8)中控制方程始终成立, 即  $r$  的取值范围没有约束,  $r$  的取值范围无上界, 对应的双体小行星系统在受扰动的情况下可发生逃逸, 且  $r_0$  处对应的自由能始终为正。

$A = 0$  时, 若  $2A + B \neq 0$ , 通过推导分析可知简化后控制不等式始终成立。若  $2A + B = 0$ , 则三次不等式可以简化为  $2Gr/r_0 + G \geq 0$ , 显然控制不等式同样恒成立。

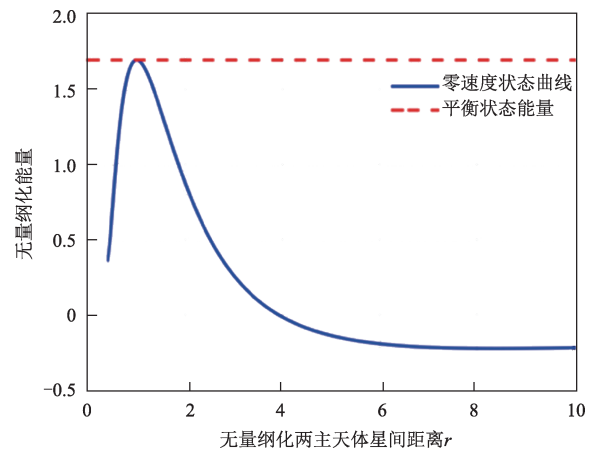


图2 运动可达范围无上界的不稳定平衡态  
Fig. 2 Unstable equilibrium, the motion is allowable on all parts of the curve beneath the equilibrium energy

由以上分析可知, 当  $A > 0$  与  $A = 0$  时相应的控制方程始终成立, 即对应的双体小行星系统在受扰动的情况下可发生逃逸, 运动范围  $r$  无上界, 该情况为运动可达范围无上界的不稳定平衡态。图2所示为系统能量与相对距离的关系, 平衡状态位于  $r/r_0 = 1$ , 运动可达区域为位于平衡状态能量  $E_0$  之下且零能量曲面之上对应的  $r$  的取值范围。

### 2) Hill稳定、能量不稳定平衡态

在  $A < 0$  的情况下, 控制方程有一实数根均分布于复平面的右半平面, 其余两根分布在复平面的左半

平面。假设控制方程的正实根为 $X$ ，若 $X > 1$ 即 $r > r_0$ ，此时 $r$ 有上界 $M$ ，且上界 $M = Xr_0$ 应满足 $M > r_0$ 。如果对平衡态 $r/r_0 = 1$ 处的双体小行星系统施加扰动，则运动可达区域可能达到上界 $M$ ，即双体小行星系统内两个主天体的相对距离的值可能在 $r_0$ 和 $M$ 之间变动，运动可达区域为位于平衡状态能量之下的曲线部分对应的距离。在该情况下， $r/r_0 = 1$ 处的双体小行星系统的系统总能量为负值，但为不稳定状态。双体小行星系统能量与相对距离的关系如图3所示。

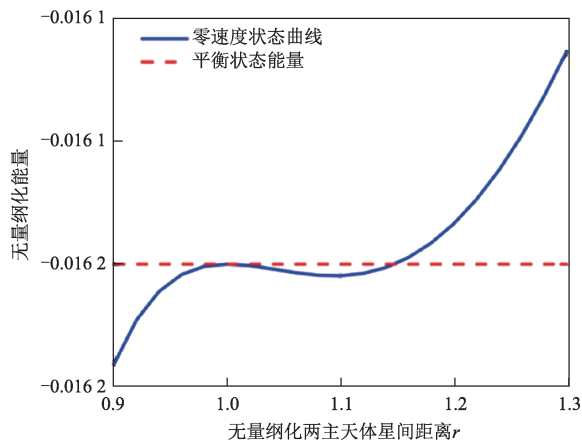


图3 双椭球体系统下运动受限的平衡态

Fig. 3 Equilibrium with limited movement in the double ellipsoid system

### 3) 能量稳定平衡态

在 $A < 0$ 且 $X \leq 1$ 即 $r < r_0$ 的情况下，则 $r$ 有上界 $M$ ，且上界 $M = Xr_0$ 满足 $M < r_0$ 。如果在双体小行星系统的相对平衡状态处施加扰动，则由控制方程可知，在 $r/r_0 = 1$ 附近区域三次控制不等式均不成立，即双体小行星系统的运动范围仅为平衡状态 $r/r_0 = 1$ 对应的一点，此时双体小行星系统的状态对应能量最小的平衡态。对该情况有能量与相对距离的关系图如

图4所示，运动可达域为位于平衡状态能量之下的曲线对应的两个小行星间的相对距离。

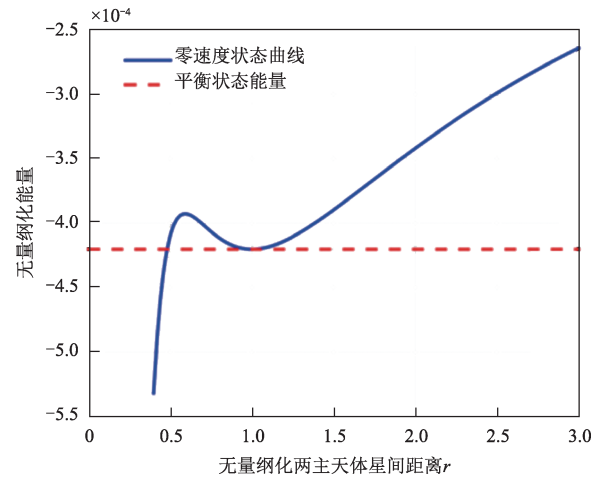


图4 双椭球体系统能量最小的平衡态

Fig. 4 Minimal energy equilibrium in the double ellipsoid system

## 3 双体小行星系统物理参数对平衡态稳定性影响分析

基于上述关于双体小行星系统平衡态稳定性的结论，研究双体小行星系统平衡态受小行星形状参数、质量分数以及双体小行星系统平衡态时小行星间相对距离等物理参数的影响。

假设小行星 $P_i$ 为密度均匀一致的双椭球体模型， $P_i$ 的椭球体三轴满足 $\alpha_i > \beta_i > \gamma_i$ 。根据2.2小节中对双体小行星系统平衡状态稳定性的分类，分别选取形状参数一致的双体小行星系统，并通过调整双体小行星主天体的构型与质心间距离，分别获得3种不同稳定性情况的系统平衡状态。各系统主天体形状参数如表1所示。

表1 3种不同稳定性情况参数选取  
Table 1 Parameters for three different kinds of equilibrium

系统平衡态稳定性	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$	$r^*$
能量稳定	400	300	300	700	500	500	5500
Hill 稳定、能量不稳定	300	300	300	500	700	500	1000
Hill 不稳定且能量不稳定	300	400	300	500	700	500	880

随后对主天体 $P_2$ 质心沿径向施加 $5 \text{ N}\cdot\text{s}$ 的冲量，并以施加冲量后的双体小行星系统状态参数为状态初值，依照第2节中提供的双体小行星系统运动方程沿时间正向递推，从而研究双体小行星受到小扰动后的运动变化。递推时长选取为25 h。

图5为分别针对具有能量稳定性、Hill 稳定且能量不稳定性、Hill 不稳定性的平衡状态双体小行星系

统，施加小扰动力后主天体质心间的运动变化规律。由仿真结果可知，对于处于平衡状态的双体小行星系统受到扰动后主天体质心间的距离变化可依据不同的稳定特性分为3类。针对能量稳定系统施加小扰动时，双体小行星系统主天体质心间距离具有保持原平衡状态不改变的特性。在平衡状态的双体小行星系统具有Hill 稳定的情况中，施加小扰动使得两个主天体



质心间的相对距离在一定范围内改变, 系统呈现有界的相对运动。对于平衡状态下Hill不稳定的双体小行星系统, 施加极其微小的扰动即可使系统主天体质心间的相对距离达到无穷远, 即发生逃逸。

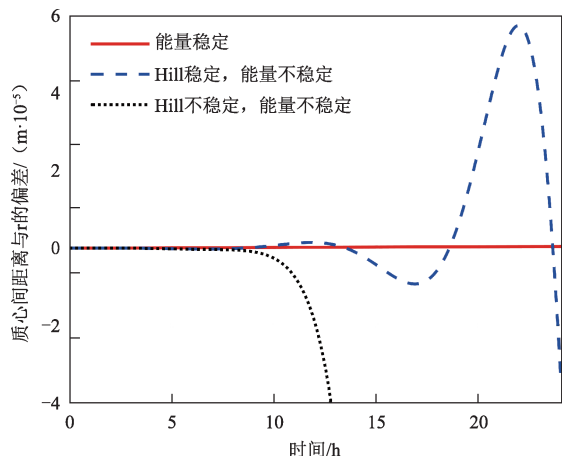


图5 能量稳定、Hill稳定但能量不稳定、Hill不稳定双体小行星系统质心距离变化

Fig. 5 Centroid distance of energy stable, Hill stable but energy unstable, Hill unstable binary asteroid systems

由2.2节中关于能量稳定性与Hill稳定性的结论, 绘制质量分数的值在 $[0,1]$ 之间变化的不同椭球体形状下曲线。图6~8中的距离长度已相对于两椭球体的半长轴之和 $\alpha_1 + \alpha_2$ 单位化。将双球体模型的曲线与不同形状参数下双椭球体的曲线结果对比, 显示出不同形状对应结果的差异。

图6~8展示了考虑两天体形状为椭球时, 因形状参数的改变而产生的能量稳定极限、Hill稳定极限以及角动量相同时对应的共轭解的变化。由图6~8可知, 在改变形状参数的过程中稳定性界限的特性未发生质的改变, 比如对于Hill稳定性的极限, 存在某一部分使得对于任意天体质心间距离, 双体小行星系统均具有Hill稳定性, 对于能量稳定性则不存在这种情况; Hill稳定极限对应的两天体间距离始终小于能量稳定极限对应的距离。微小的椭球率可一定程度改变系统的稳定性极限, 且两主天体三轴比例不同的情况会使得对应的能量稳定性极限、Hill稳定性极限以及共轭解的曲线不再具有对称性。下面分析小行星形状参数变化对双体小行星系统平衡态稳定性的影响。假设主天体形状参数满足 $\beta_i = \gamma_i$ , 选取小行星归一化后的长半轴为 $\alpha_1 = 6$ ,  $\alpha_2 = 4$ , 两个小行星质心间的初始平衡态距离为 $r^* = 10$ 。

图9给出了控制方程的三次项系数 $A$ 与控制方程实数解 $X_i$ 的变化曲线。由图9可知, 每一条曲线均具

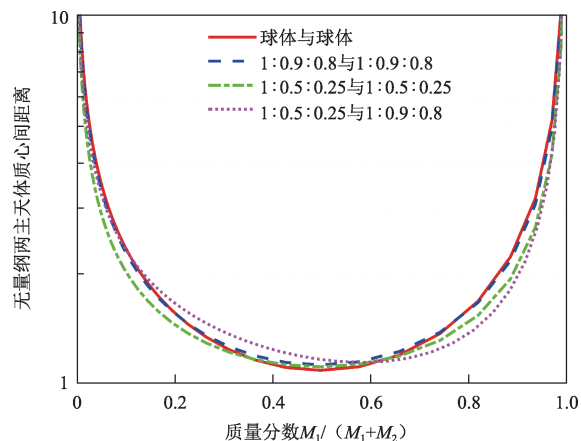


图6 不同形状参数天体的能量稳定质心间距离极限随质量分数的变化

Fig. 6 Centroid distance limit of energy stable system for a range of different shape bodies

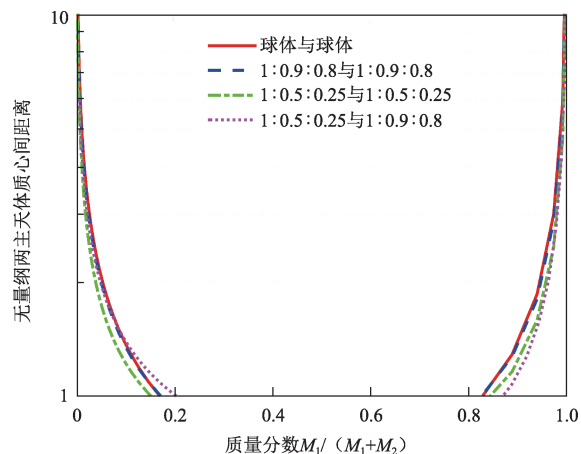


图7 不同形状参数天体Hill稳定质心间距离极限随质量分数的变化

Fig. 7 Centroid distance limit of Hill stable system for a range of different shape bodies

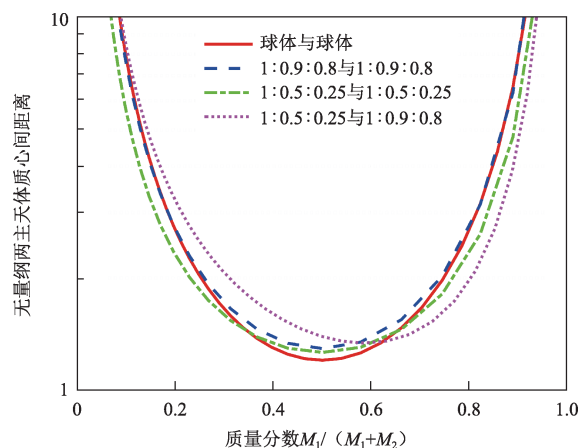
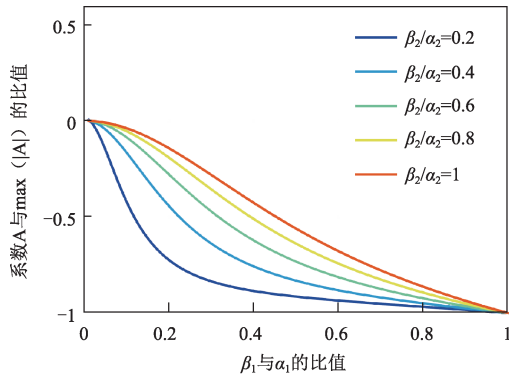
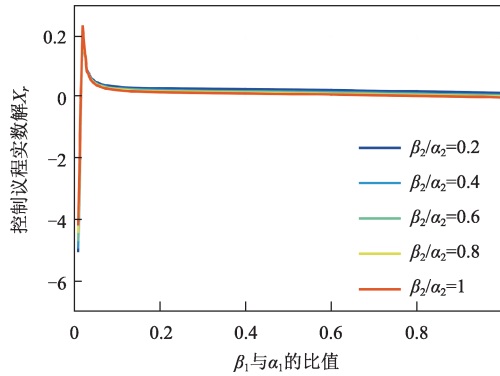


图8 与接触系统具有相同角动量的不同形状天体的共轭解随质量分数的变化

Fig. 8 Conjugate stable solutions for a range of different shape bodies. The conjugate solution has the same angular momentum as the solution for a touching system

(a) 控制方程的三次项系数 $A$ 的影响(b) 控制方程实数解 $X_r$ 的影响图9  $\beta_1/\alpha_1$ 与 $\beta_2/\alpha_2$ 对控制方程的三次项系数 $A$ 与控制方程实数解 $X_r$ 的影响Fig. 9 Effect of  $\beta_1/\alpha_1$  and  $\beta_2/\alpha_2$  on coefficient  $A$  and real solution  $X_r$  in the control equation

有相似的变化趋势, 即当主天体 $P_1$ 短半轴与长半轴的比值 $\beta_1/\alpha_1$ 极小时, 控制方程三次项系数 $A > 0$ , 此时双体小行星系统处于可能发生逃逸的不稳定状态; 随着 $\beta_1/\alpha_1$ 略微增大, 存在小部分区间可满足 $A < 0$ 且 $X_r > 1$ , 该情况下双体小行星系统运动可达范围具有上界 $M = X_r r^*$ , 为能量不稳定的相对平衡状态; 主星形状参数 $\beta_1/\alpha_1$ 继续增大, 双体小行星系统的结果为 $A < 0$ 且 $X_r < 1$ , 即平衡状态能量稳定。而针对不同取值的 $\beta_2/\alpha_2$ 可发现, 主天体 $P_2$ 短半轴与长半轴的比值的增大将使得双体小行星系统达到稳定状态所需的小行星 $P_1$ 的形状参数比例 $\beta_1/\alpha_1$ 更小。

下面分析不同小行星质量分数对双体小行星系统平衡态稳定性的影响。令主天体的三轴比例满足1:0.75:0.5, 选取小行星 $P_2$ 的长半轴为 $\alpha_2 = 1$ , 两个小行星质心间的距离为 $r^* = 10$ , 给出控制方程的三次项系数 $A$ 与控制方程实数解 $X_r$ 的变化曲线如图10所示。图中变化曲线与图9(b)中变化趋势相近, 出现该现象的原因为假设密度相同的条件下,  $\beta_1/\alpha_1$ 比值的增加将导致质量分数的增大。并且在质量分数极大时, 即小行星 $P_1$ 的质量 $M_1$ 远大于 $M_2$ 时, 双体小行星平衡状

态对应的 $A$ 与 $X_r$ 增大, 双体小行星系统开始由能量稳定的相对平衡状态向Hill稳定且能量不稳定状态转变。

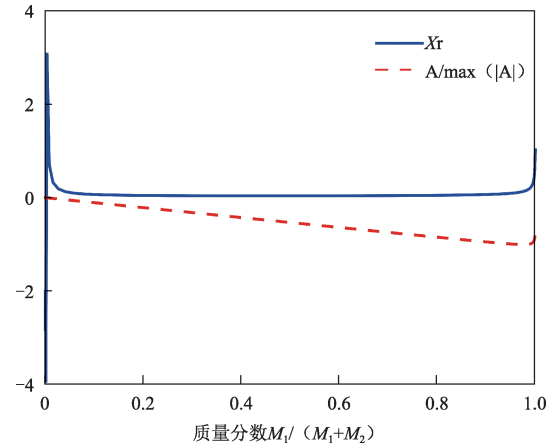


图10 质量分数对双体小行星系统平衡态稳定性的影响

Fig. 10 Influence of the mass ratio on the stability of equilibrium

最后分析小行星间相对距离变化对双体小行星系统平衡态稳定性的影响。假设两个小行星具有相同的形状参数, 选取小行星的长半轴 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , 为保证两个小行星初始状态不为碰撞状态, 质心间的距离取值需 $r^* > \alpha_1 + \alpha_2$ , 即在 $[2, 10]$ 的区间内改变双体小行星系统的质心距离。

控制方程的三次项系数 $A$ 与控制方程实数解 $X_r$ 的随 $r^*$ 变化的曲线如图11所示。由图11可知, 随着双星间距离的增加,  $A$ 为负值且持续减小,  $X_r$ 始终为小于1的正数, 即双体小行星系统的相对平衡状态将在 $r^*$ 增大的过程中始终保持稳定状态。

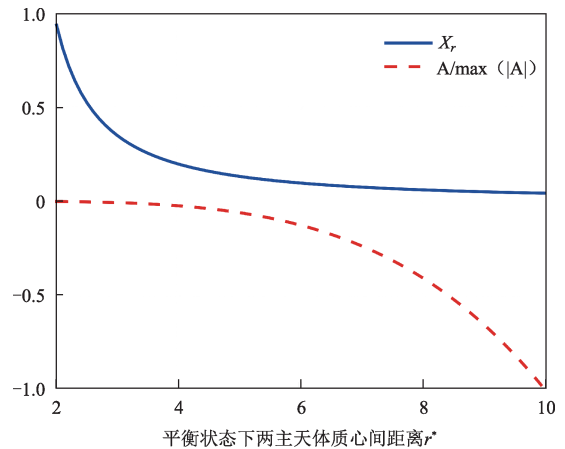
图11 小行星间距离 $r_0$ 对双体小行星系统平衡态稳定性的影响

Fig. 11 Influence of the centroid distance on the stability of equilibrium

## 4 结 论

本文研究了双体小行星系统在考虑形状参数与质

量分布的情况下,在相互引力作用运动的平衡态与稳定性问题。文中基于双椭球构成的全二体模型从分析双体小行星系统的运动可达范围的角度给出了确定双体小行星系统平衡状态的稳定性的方法。研究发现小行星形状参数 $\beta_1/\alpha_1$ 的增大可使得双体小行星系统由具有逃逸潜能的不稳定平衡态,经历运动范围存在上界的平衡状态,最终转变为稳定的平衡状态; $\beta_2/\alpha_2$ 增大将使得双体小行星系统最终达到稳定状态对应的 $\beta_1/\alpha_1$ 临界值更小。双体小行星系统质量分数 $M_1/(M_1+M_2)$ 的增大对稳定性的影响与形状参数产生的影响类似,但在 $M_1 \gg M_2$ 时系统由稳定平衡状态趋近于有上界的不稳定状态。系统平衡态时小行星质心间的距离 $r_0$ 的改变不会对系统的稳定性产生质的影响。这些研究结论对于未来双体小行星附近探测器的运动研究具有重要的理论指导意义。

### 参 考 文 献

- [1] WALSH K J. Asteroids with satellites: inventory, properties, and prospects for future discoveries[J]. *Earth Moon and Planets*, 2009, 105(2-4): 193-199.
- [2] MARGOT J L. Binary asteroids in the near-Earth object population [J]. *Science*, 2002, 296(5572): 1445-1448.
- [3] PRAVE C P. Photometric survey of binary near-Earth asteroids[J]. *Icarus*, 2006, 181(1): 63-93.
- [4] SCHEERES D J. Stability of binary asteroids[J]. *Icarus*, 2002, 159 (2): 271-283.
- [5] SCHEERES D J. Stability of the planar full 2-body problem[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2009, 104: 103-128.
- [6] BELLEROSE J. Energy and stability in the full two body problem[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2008, 100(1): 63-91.
- [7] BELLEROSE J. General dynamics in the restricted full three body problem[J]. *Acta Astronautica*, 2008, 62(10-11): 563-576.
- [8] SCHEERES D J. Stability of equilibrium points in the restricted full three-body problem[J]. *Acta Astronautica*, 2007, 60(3): 141-152.
- [9] WOO P, MISRA A K, KESHMIRI M. On the planar motion in the full two-body problem with inertial symmetry[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2013, 117(3): 263-277.

作者简介:

**杜燕茹**(1994-),女,硕士,主要研究方向:双体小行星附近轨道动力学。

通讯地址:北京理工大学宇航学院(100081)

E-mail:duyanru\_shining@163.com

**李翔宇**(1991-),男,博士后,主要研究方向:小天体近轨操作动力学。

通讯地址:北京理工大学宇航学院(100081)

E-mail:lixiangyu@bit.edu.cn

**乔栋**(1979-),男,教授,博士生导师,主要研究方向:航天器轨道动力学与控制。

通讯地址:北京理工大学宇航学院(100081)

电话:(010)68913488

E-mail:qiaodong@bit.edu.cn

## Study on Equilibrium and Stability of Binary Asteroid Systems

DU Yanru<sup>1,2</sup>, LI Xiangyu<sup>1,2</sup>, HAN Hongwei<sup>1,2</sup>, QIAO Dong<sup>1,2</sup>

(1. School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Key Laboratory of Autonomous Navigation and Control for Deep Space Exploration, Ministry of Industry and Information Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** The unique motion of binary asteroid systems provide important clues for the evolution of planets. Therefore, binary asteroid systems become hot targets in asteroid exploration. In this paper, based on the double ellipsoid model, the relative motion, equilibrium condition and stability of binary asteroid systems are studied. Firstly, the full two-body dynamic equation of the double ellipsoid model is established to describe the relative motion of a binary asteroid system. Secondly, the Lagrangian equation of motion is used to solve the angular momentum and energy of the system, and the equilibrium conditions are obtained. Finally, a method to determine the stability of equilibrium is given by using the zero-velocity state surface and the influence of the asteroid's physical parameter on the stability of equilibrium is analyzed. This research can provide a theoretical reference for the trajectory design and control in future exploration missions to binary asteroid systems.

**Keywords:** binary asteroid systems; double ellipsoid model; equilibrium; stability

**Highlights:**

- Equilibrium conditions for the double ellipsoid model are obtained.
- Three kinds of stabilities of the binary asteroid systems, including Hill unstable, Hill stable but energy unstable and energy stable are investigated.
- The impacts of shape ratios, mass ratios and centroid distance on the stability of equilibrium are discussed.

[责任编辑:杨晓燕,英文审校:朱恬]