

# 双层结构月球的自由天平动与受迫天平动

李文潇<sup>1,2</sup>, Alexander GUSEV<sup>2,3</sup>, 平劲松<sup>1,2</sup>, 张同杰<sup>1</sup>

(1. 北京师范大学天文系, 北京 100875; 2. 中国科学院国家天文台月球与深空探测重点实验室, 北京 100012;  
3. 俄罗斯喀山联邦大学, 喀山 420008)

**摘要:**根据 JPL/NASA 发布的月球行星历表 DE430/LE430 提供的月球物理参数, 计算了月球主转动惯量; 使用刚体月球转动微分方程获得的月球物理天平动解析关系式, 计算了不同分层模型的月球自由天平动三个模式的频率及周期, 比较并讨论了不同的解析结果; 在此基础上, 评估了月球受迫天平动一个模式的幅度。

**关键词:** 月球天平动; 解析方法; 频率及周期; 幅值

**中图分类号:** P691 **文献标识码:** A **文章编号:** 2095-7777(2014)03-0205-05

**DOI:**10.15982/j.issn.2095-7777.03.007

## Free and Forced Librations of Two-Layer Structure of the Moon

LI Wenxiao<sup>1,2</sup>, Alexander GUSEV<sup>2,3</sup>, PING Jinsong<sup>1,2</sup>, ZHANG Tongjie<sup>1</sup>

(1. Department of Astronomy, Beijing Normal University, Beijing 100875, China; 2. Key Laboratory of Lunar & Deep Space Exploration Research, National Astronomical Observatories, CAS, Beijing 100012, China;  
3. Russian Kazan Federal University, Kazan 420008, Russia)

**Abstract:** Based on the lunar physical parameters in ephemeris DE430/LE430 of JPL/NASA, we estimated the moments of inertia of the Moon. Using these values of moment of inertia, the frequencies and periods of lunar free librations in different modes have been calculated by solving the rotational differential equations of rigid Moon. We compared the results and discussed the analytic results of lunar librations. Meanwhile, we also estimated the forced librations by means of the amplitude of longitudinal part. For the further research, more analytic methods should be mixed into numerical results, and the interactions between two layers would be next objective.

**Key words:** lunar librations; analytic methods; frequencies and periods; amplitude

## 0 引言

月球天平动是对月球运动在空间摆动的描述。它是月球自转、公转轨道以及周围天体对月球的力的作用力的综合表现。根据月球激光测距和月震观测, 目前推测月球有多层结构, 包括壳、幔、外核、内核等。本文涉及的层次结构只包含核、幔两层模型。依据卡西尼定则, 月球自转周期等于其公转周期; 月球赤道与黄道相交成  $1^{\circ}32'$  角; 月球自转轴、月球轨道平面的法线以及黄道面的法线三者共面, 且第三

者处于前两者之间。

物理天平动的理论基础, 主要是刚体转动微分方程, 此处方程由卡西尼第一定律简化得到, 并进行小量线性近似。对刚体月球, 转动微分方程为经典的欧拉-刘维尔方程<sup>[1]</sup>

$$\frac{d(\vec{I}\vec{\omega})}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{I}\vec{\omega} = \vec{T}(t) \quad (1)$$

其中,  $\vec{\omega}$  为月球轨道转动向量, 描述转动角速度;  $\vec{T}(t)$  为作用在月球上的外部总力矩, 主要来自太阳系内大天体对月球的引力作用;  $I$  为刚体月球转动惯

量,只有  $X, Y$  及  $Z$  方向上的对角分量  $A, B$  及  $C$  不为零。

## 1 自由天平动

### 1.1 自由天平动解析理论

对刚体月球,不考虑液态核、潮汐变形以及潮汐耗散的影响,满足自转公转共振的一阶线性转动微分方程组为<sup>[1]</sup>

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 - (1 - \beta)n \dot{p}_2 + 4\beta n^2 p_1 &= f_1 \\ \ddot{p}_2 + (1 - \alpha)n \dot{p}_1 + \alpha n^2 p_2 &= f_2 \\ \ddot{\tau} + 3\gamma n^2 \tau &= f_3 \end{aligned} \quad (2)$$

式中:  $p_1, p_2$  表示月球参考系中椭圆轨道面的法向极轴位置;  $f_1, f_2, f_3$  为独立于旋转参量的表达,与外部力矩有关;  $n$  为月球平均角速度;  $\alpha, \beta, \gamma$  为动力学椭率,由月球(此处将月球看作惯性椭球)转动惯量( $A < B < C$ )得来,其表达式为

$$\alpha = \frac{C - B}{A}, \beta = \frac{C - A}{B}, \gamma = \frac{B - A}{C} \quad (3)$$

其中,  $\alpha, \beta, \gamma$  的取值选用 JPL DE430 历表中给出的值,分别为<sup>[3]</sup>:  $\beta = 6.310\ 213 \times 10^{-4}$ ,  $\gamma = 2.277\ 317 \times 10^{-4}$ ,  $\alpha$  的值可由  $\beta$  和  $\gamma$  获得,  $\alpha = 4.032\ 897 \times 10^{-4}$ 。

### 1.2 自由天平动特征频率与周期解析式

Rambaux 和 Williams(2011)<sup>[1]</sup> 给出了自由天平动转动微分方程组的特征频率的解析式。对经度天平动

$$\omega_{lon} = \sqrt{3\gamma}n \quad (4)$$

对纬度天平动,其特征频率不同,在月固坐标系内和空间坐标系内分别为

$$\omega_{lat} = \left(1 + \frac{3}{2}\beta\right)n; \omega_{lat} = \frac{3}{2}\beta n \quad (5)$$

对极轴天平动

$$\omega_{wob} = 2\sqrt{\alpha\beta}n \quad (6)$$

对刚体月球整体,通过全月观测,可获得全月动力学椭率值,而其 3 个关系式决定的值只有两个是独立的,第 3 个可由其他两个推得。同时,若之后考虑月球内部分层结构的天平动频率、周期,则需要获得月球内部对应层次的动力学椭率,即通过全月与月核的转动惯量关系,得到月核转动惯量,进而获得月核动力学椭率,方便讨论月核的天平动状态。

关于月球平均运动的情况,可在网址 <http://hea.iki.rssi.ru/~nik/astro/links.htm> 获得,  $T_{orbit} = 27.321\ 661\ d$ ,  $e = 0.054\ 9$ , 恒星年天数  $1\ a = 365.256\ 36\ d$ , 而月球公转平均角速度有(单位:rad/s)

$$n = \frac{2\pi}{T_{orbit} \times 86\ 400.0} \quad (7)$$

### 1.3 刚体月球(全月)的自由天平动

基于文献[2]中的月球物理参数,我们可以得到刚体月球转动惯量的 3 个分量。在对刚体月球转动耗散的讨论中,Williams 给出了如下关系<sup>[3]</sup>

$$C_{22rigid} = \frac{J_{2rigid}\gamma(1+\beta)}{2(2\beta-\gamma+\beta\gamma)} \quad (8)$$

$$\frac{C}{mR^2} = \frac{4C_{22rigid}}{\gamma} \quad (9)$$

将  $C/mR^2$  归一化,使  $mR^2$  内含在转动惯量的  $C$  部分。比较动力学椭率的定义式可得

$$4C_{22rigid} = B - A \quad (10)$$

$$J_{2rigid} = \frac{1}{2}(2C - A - B) \quad (11)$$

进一步可得刚体月球转动惯量各分量的归一化平均值,分别为

$$C = \frac{J_2 + 2C_{22}}{1 - \frac{1-\gamma\beta}{1+\beta}} \quad (\text{或 } C = \frac{4C_{22}}{\gamma}) \quad (12)$$

$$B = 4C_{22} + \frac{1-\gamma\beta}{1+\beta}C \quad (13)$$

$$A = \frac{1-\gamma\beta}{1+\beta}C \quad (14)$$

代入所需量,得到结果。将以上所得结果整理为表 1,并且进一步可得自由天平动不同模式的特征频率,及其对应周期,所得结果整理入表 2。

表 1 基本参量计算结果

Table 1 Values of basic parameters

参量	来源类型	单位	值
月球平均角速度	Fixed	rad/s	$2.661\ 707\ 22 \times 10^{-6}$
$(C-B)/A$	Fit	1	$4.032\ 897 \times 10^{-4}$
$A$	Fit	1	0.392 894
$B$	Fit	1	0.392 984
$C$	Fit	1	0.393 142

表 2 包含了自由天平动的频率和周期。通过比较可以发现,数值结果无法定位到不同参考系下的纬天平动;数值解和解析解的结果不同。数值解与解析解之间的差别,可能由几种原因带来,一为使用数据的测量误差,二为微分转动微分方程的近似,三为微分方程特征解的近似。具体原因,有待进一步对模型进行深入研究与讨论,确定差别来源。解析分析的好处在于,其物理模型建立合理,对研究理解物理天平动的物理机制,有重要意义。数值分析的好处在于,短周期天平动结果,可由月球历表提取获得,其周期和幅值可靠度高,但长周期的历表数据,

为观测历表拟合延伸获得,长周期(低频)项可能由拟合过程产生。

表 2 刚体月球自由天平动频率及周期

Table 2 Frequencies and periods of free librations for rigid Moon

名称	$\omega/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	$T/\text{s}$	$T/\text{d}$	$T/\text{a}$	Rambaux <sup>[1]</sup> /d
经天平动	$6.9572 \times 10^{-8}$	$9.0313 \times 10^7$	$1.04529 \times 10^3$	2.8618	1056.13
纬天平动(MR)	$2.6642 \times 10^{-6}$	$2.3584 \times 10^6$	27.2958	0.0747	—
纬天平动(SR)	$2.5194 \times 10^{-9}$	$2.4939 \times 10^9$	$2.886502 \times 10^4$	79.0267	—
极天平动	$2.6855 \times 10^{-9}$	$2.3397 \times 10^9$	$2.707987 \times 10^4$	74.1393	27257.27

注:其中 MR 表示月固参考(Moon reference),SR 表示空间参考(space reference)。

#### 1.4 月球流体核的自由天平动

在对刚体月球的转动惯量、动力学椭率以及自由天平动频率周期讨论的基础上,依据月球整体与核的关系,可对月核的自由天平动做简单讨论。

月球从表面到核,根据不同判断标准以及测量方式,可以分为多个层次,如壳、幔、核幔边界、外核及内核。动力学研究中,我们没法分辨这么多层次,尤其是最初的研究讨论,只能从最简单的模型入手,故我们讨论的为将月球分为幔、核的两层结构,同时认为月幔为刚体状态(固态),月核为液态(或称为流体态)。

Williams 等<sup>[2]</sup>根据 GRAIL 和 LLR 提供的月球重力场解,给出了核幔边界扁率  $f$ ,流体核与全月的  $Z$  轴转动惯量比  $C_f/C$ ,以及关系式  $[C_f - (A_f + B_f)/2]/C$  的值。由于  $C_f/C$  与  $[C_f - (A_f + B_f)/2]/C$  相关,不独立,且  $f$  为拟合得来,其不确定度来自月球内部,更难确定,所以月核转动惯量的讨论,使用这两个关系式更合理<sup>[2]</sup>

$$\frac{C_f}{C} = 7 \times 10^{-4} \quad (15)$$

$$[C_f - (A_f + B_f)/2]/C = (1.73 \pm 0.20) \times 10^{-7} \quad (16)$$

但式(3)只有 2 个关于独立月核转动惯量的关系式,无法确定其 3 个部分的值,故还需进一步假设月核转动惯量的情况,以期得到转动惯量的 3 个部分的值。月核转动惯量的确定,有赖于月核转动状态的假设。简单假设月核绕其转动惯量主轴  $Z$  分量方向转动,故可分为主轴固定的旋转与主轴绕某一固定轴转动的转动,即月核关于转动轴动力学对称与动力学非对称两种的简单假设。

##### 1) 动力学对称流体核

假设月球流体核是关于转轴  $Z$  动力学对称的,即月核为关于惯量主轴  $Z$  的旋转椭球,如此便有  $A_c = B_c$ ,于是

$$\alpha_{\text{core}} = \frac{C_c - B_c}{A_c} = \frac{C_c - A_c}{B_c} = \beta_{\text{core}} = \frac{C_c - A_c}{A_c} \quad (17)$$

$$\gamma_{\text{core}} = 0 \quad (18)$$

其中各量下角标 core 和 c,表示月核,与式(15)、(16)中下角标 f 含义一致。

由式(15)、(16)可得月核转动惯量分量的值,结果见表 3;将此 3 个值代入式(17)便可获得月核动力学椭率在假设一条件下的情况,所得结果整理在表 3 中;这样便可使用式(4)、(5)、(6)和(7)获得月核自由天平动频率及周期,所得结果整理在表 4 中。

##### 2) 非动力学对称的流体核

假设月球流体核是关于转轴  $Z$  非动力学对称的,能得到的为  $A_c \neq B_c$ 。此为不等式,不满足求解月核转动惯量分量条件的需求,故需要进一步合理假设月核转动惯量 X、Y 轴部分所满足的条件。

Noyelles 等在土卫一的动力学研究<sup>[4]</sup>中,也讨论到非动力学对称的转动惯量问题,他假设土卫一核的大小与土卫一整体大小成比例,即有<sup>[5]</sup>

$$\frac{a_c}{a} = \frac{b_c}{b} = \frac{c_c}{c} = \frac{R_c}{R} \quad (19)$$

进而得到土卫一转动惯量各分量。

借鉴以上方法,直接假设月核的转动惯量 X、Y 分量与月球整体情况成比例,即

$$\frac{A_c}{A} = \frac{B_c}{B} \quad (20)$$

由式(15)、(16)及(20)可得非动力学对称的月核转动惯量分量值,同样可通过定义式得到月核动力学椭率值,结果见表 3;最后获得在此假设下的月核自由天平动频率及周期,结果见表 4。

##### 3) 月球流体核与刚体月球的比较

由表 3 可知,月核转动惯量对月球转动惯量贡献很小,月球转动惯量主要部分为月幔,而不同的月核动力学模型对月核转动惯量 X、Y 分量有小量区别。同时,月球和月核的动力学椭率处于同一数量级。

表 3 不同月球结构模型的转动惯量和动力学椭率

Table 3 Moment of inertia and dynamical ellipticity for different lunar layer models

参量	刚体月球	月核 (动力学对称)	月核 (非动力学对称)	单位
A	0.392 894 28	$2.751\ 318\ 83 \times 10^{-4}$	$2.751\ 002\ 24 \times 10^{-4}$	1
B	0.392 983 81	$2.751\ 318\ 83 \times 10^{-4}$	$2.751\ 629\ 12 \times 10^{-4}$	1
C	0.393 142 26	$2.751\ 995\ 82 \times 10^{-4}$	$2.751\ 995\ 82 \times 10^{-4}$	1
(C-B)/A	$4.032\ 897 \times 10^{-4}$	$2.460\ 605 \times 10^{-4}$	$1.332\ 956 \times 10^{-4}$	1
(C-A)/B	$6.310\ 213 \times 10^{-4}$	$2.460\ 605 \times 10^{-4}$	$3.610\ 863 \times 10^{-4}$	1
(B-A)/C	$2.277\ 317 \times 10^{-4}$	0.0	$2.277\ 907 \times 10^{-4}$	1

表 4 不同月球结构模型的自由天平动频率及周期

Table 4 Frequencies and periods of lunar librations for different lunar layer models

名称	刚体月球	月核 (动力学对称)	月核 (非动力学对称)
经天平动频率/(rad·s <sup>-1</sup> )	$6.957\ 17 \times 10^{-8}$	0.0	$6.958\ 05 \times 10^{-8}$
纬天平动频率(MR)/(rad·s <sup>-1</sup> )	$2.664\ 23 \times 10^{-6}$	$2.662\ 69 \times 10^{-6}$	$2.663\ 14 \times 10^{-6}$
纬天平动频率(SR)/(rad·s <sup>-1</sup> )	$25.193\ 9 \times 10^{-10}$	$9.824\ 09 \times 10^{-10}$	$14.416\ 55 \times 10^{-10}$
极天平动频率/(rad·s <sup>-1</sup> )	$2.685\ 47 \times 10^{-9}$	$1.309\ 88 \times 10^{-9}$	$1.167\ 89 \times 10^{-9}$
经天平动周期/d	$1.045\ 29 \times 10^3$	—	$1.045\ 15 \times 10^3$
纬天平动周期(MR)/d	27.295 8	27.311 58	27.306 87
纬天平动周期(SR)/d	$2.886\ 502 \times 10^4$	$7.402\ 42 \times 10^4$	$5.044\ 35 \times 10^4$
极天平动周期/d	$2.707\ 987 \times 10^4$	$5.551\ 82 \times 10^4$	$6.226\ 78 \times 10^4$
经天平动周期/a	2.861 78	—	2.861 41
纬天平动周期(MR)/a	0.074 73	0.074 77	0.074 76
纬天平动周期(SR)/a	79.026 51	202.663 76	138.104 23
极天平动周期/a	74.139 13	151.997 82	170.477 0

由表 4 可知,月核自由天平动的纬天平动和极轴天平动的周期比月球整体部分的周期长,初步说明月核在纬天平动和极轴天平动上的情况比月球整体复杂,同时耗散更小,阻尼时间更长,而月核的经天平动和月固纬天平动,在外力作用平面内,受外力影响大,耗散大,且基本与月球整体情况一致,所以此部分天平动相对一致。

#### 4) 动力学对称核与非动力学的比较

月核的两种假设,从结果上,无法进行直接比较其好坏,因为月核动力学情况没有对应观测结果。但月核模型的假设,对初步认识月核层次结构及其动力学影响,有重要意义。

由表 3 和表 4 可知,两种月核假设,获得的月核转动惯量分量值有差异,此差异对月核自由天平动频率、周期有较大影响。从表 4 中经天平动、纬天平动(MR)结果可认为,复杂度高的月核模型,与刚体月球情况更贴近,越复杂的月核模型解析,获得的月核动力学情况,更可信。月球层次结构的增加,可提高月球动力学的认识,以及月球内部各结构的动力

学表现。但内部结构对整体月球轨道的影响,尤其是幅值,还有待进一步研究。

## 2 受迫经天平动幅值

对月球自由天平动的频率和周期做了简单讨论后,解析研究还能讨论受迫天平动的幅值问题。

Noyelles 等在土卫一的动力学研究<sup>[4]</sup>中,借用 Murray 和 Dermott(1999)<sup>[5]</sup>专著中的解析关系式,简单讨论了土卫一的受迫经天平动幅值。其关系式为

$$\phi = \frac{-2e}{1 - \left(\frac{\omega_u}{n}\right)^2}, \gamma' = \frac{2e}{1 - \left(\frac{n}{\omega_u}\right)^2} \quad (21)$$

式中: $\phi$  是潮汐天平动主项的幅值; $\gamma'$  是受迫天平动物理部分的幅值; $\omega_u$  是月球目标结构的自由经天平动频率,若讨论刚体月球,则此处为刚体月球自由经天平动频率,若讨论月核,则此处为月核自由经天平动频率; $e$  是月球轨道椭率; $n$  是月球公转平均角速度。而 $\left(\frac{\omega_u}{n}\right)^2$  部分还需要进行修正,其修正式为

$$\left(\frac{\omega_u}{n}\right)^2 = 3 \frac{B-A}{C} \left(1 - 5e^2 + \frac{13}{16}e^4\right) \quad (22)$$

将表3中非动力学对称的月核模型结果代入式(22),并代入月球公转轨道椭率值,可得非动力学对称月核受迫经天平动估值结果为  $\psi = -6.291^\circ$ ,  $\gamma' = -15.254''$ 。

将该结果与文献[1]中月球历表数值解析得到的受迫经天平动幅值比较,同时比较式(22)及表3中不同结构模型的动力学椭率情况,可知月核受迫经天平动幅值与刚体月球受迫天平动幅值在同一数量级。若有观测可直接获得月核受迫经天平动幅值情况,可初步判断月核动力学情况,进而尝试获得月核其他参数。

### 3 结束语

目前,我们利用月球物理参数及月球动力学基本知识,完成了对月球整体及月核自由天平动的初步讨论,比较了不同结构的周期频率情况,并评估了月核受迫天平动幅值大小。下一步研究,将着眼于解析理论与数值方法间的差异来源确定,并进一步进行月球受迫天平动幅值讨论。

### 参 考 文 献

- [1] Rambaux N, Williams J G. The Moon's physical librations and determination of their free modes[J]. *Celest Mech Dyn Astr*, 2011(109):85-100.
- [2] Williams J G, Boggs D H, Folkner W M. DE430 lunar orbit, physical librations, and surface coordinate[P]. JPL IOM 335-JW, DB, WF-20130722-016, 2013.
- [3] Williams J G, Boggs D H, Yoder C F. Lunar rotational dissipation in solid body and molten core[J]. *Journal of Geophysical Research*, 2001(106):27933-27968.
- [4] Noyelles B, Karatekin Ö, Rambaux N. The rotation of Mimas[J]. *A&A*, 2011(536):A61.
- [5] Murray C D, Dermott S F. *Solar system dynamics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

作者简介:

李文潇(1990—),男,硕士研究生,主要研究方向:月球无线电相位测距,月球物理天平动。

通信地址:北京师范大学天文系(100875)

电话:18811478825

E-mail:liwenxiao3443@mail.bnu.edu.cn

[责任编辑:宋宏]