

不规则小天体引力场内的广义甩摆轨道

曾祥远¹, 李俊峰², 刘向东¹

(1. 北京理工大学自动化学院, 北京 100081; 2. 清华大学航天航空学院, 北京 100084)

摘要: 选取具有典型不规则外形的细长形小天体作为研究对象, 应用偶极子模型近似其外部引力场分布。针对其引力场内的质点动力学, 研究一类特殊的动力学行为——广义甩摆轨道。与传统引力甩摆轨道不同, 该类轨道能够在很短的时间内将质点从环绕轨道改变至逃逸轨道, 或将逃逸轨道上的质点捕获至小天体引力场内。从轨道能量的变化入手, 分析该类轨道的成因并给出仿真算例。

关键词: 不规则小天体; 偶极子模型; 广义甩摆轨道

中图分类号: V412

文献标识码: A

文章编号: 2095-7777(2016)01-0029-05

DOI: 10.15982/j.issn.2095-7777.2016.01.004

引用格式: 曾祥远, 李俊峰, 刘向东. 不规则小天体引力场内的广义甩摆轨道[J]. 深空探测学报, 2016, 3(1): 29–33.

Reference format: Zeng X Y, Li J F, Liu X D. Generalized flyby trajectories over irregular-shaped small bodies[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2016, 3(1): 29–33.

0 引言

甩摆轨道(flyby trajectory), 又称引力辅助(gravity assist)、引力弹弓效应(V_{∞} leveraging technique)^[1]、近旁转向、天体借力飞行等, 是深空探测中多次使用过的一种轨道机动技术^[2]。

其理论研究可追溯到20世纪中期, 是在轨道设计过程中使得航天器经过目标天体附近, 利用天体引力改变航天器在惯性系中的速度, 从而缩短任务时间或减少燃料消耗等。其中, 借力天体一般为大行星或其较大质量的卫星, 特殊情况下也可以是太阳^[3]。

为了简单说明行星甩摆轨道的原理, 图1给出了航天器利用地球引力甩摆时的一条示意轨道。其中, 地球在惯性系下(日心轨道速度)的速度设为 \mathbf{v}_E , 探测器进入及飞离地球引力影响球时的速度分别设为 \mathbf{v}_{in} 和 \mathbf{v}_{out} , 基于能量守恒定律, 应有关系式 $|\mathbf{v}_{in}|=|\mathbf{v}_{out}|$ 。由几何关系可知, 在影响球边缘处探测器在惯性系下的速度为 $\mathbf{v}^- = \mathbf{v}_{in} + \mathbf{v}_E$ 和 $\mathbf{v}^+ = \mathbf{v}_{out} + \mathbf{v}_E$, 则探测器此次甩摆中获得的速度增量为 $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^- = \mathbf{v}_{out} - \mathbf{v}_{in}$ 。即探测器经过一次引力甩摆, 其相对借力行星的速度并没有改变, 而是改变了它在惯性系中的速度^[2]。

与上述传统引力辅助不同, 本文将要研究的广义甩摆轨道是不规则小天体附近的一种短期动力学行

为, 是绕飞质点的轨道周期与小天体的自旋周期在短期内相等或近似相等时而发生机械能改变的一种力学现象^①。

小天体不规则的引力分布及其快速自旋的耦合作用, 使其引力场内质点的动力学行为相当复杂, 有可能在较短的时间内撞击到小天体表面或逃离其引力场。Scheeres等(1996)最早基于二阶二次引力场研究了Castalia附近的共振轨道、捕获轨道及逃逸轨道^[4]。作为广义甩摆轨道的特例, 短期捕获及逃逸轨道最早见于Miller与Scheeres的通信中^[4], 指出这是小天体短期内清除引力场内异物、捕获粒子至其表面或捕获临近小天体等重要动力学机制。该类轨道对于环绕小天体飞行的探测器而言, 是极为危险的轨道, 需要深入研究并在设计中排除。

Yu和Baoyin等(2013)基于多面体引力场建模方法, 研究了Kleopatra小行星附近的短期作用轨道(文中称为“resonant orbit”)及逃逸轨道等^[5], Wang等(2014)则基于形状对上述轨道进行了归类分析^[6]。另一方面, 在DAWN探测器的设计中, NASA将Vesta引力场中1:1共振轨道的危险工况排除在外^[7]。上述共振轨道等广义甩摆轨道的特例, 足以表明该动力学行为在任务设计中的重要性。同时, 对于广义甩摆轨道的研究, 有利于

收稿日期: 2015-11-02; 修回日期: 2015-11-16

基金项目: 国家重点基础研究发展计划“973”项目(2012CB720000); 博士后基金特别资助(2015T80077)

① 本文暂时将该类轨道命名为“广义甩摆轨道”, 若有更恰当名称请各位读者不吝赐教。

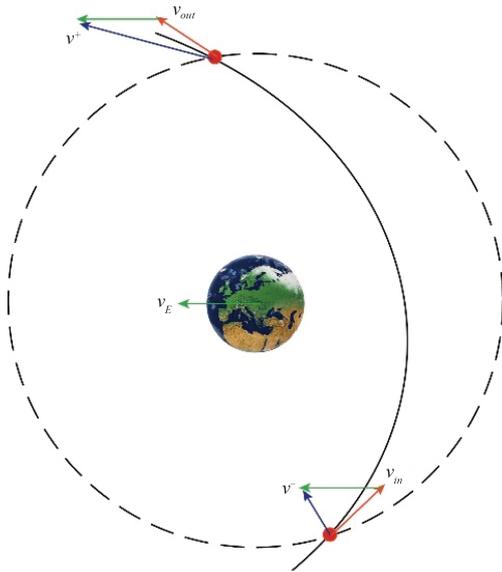


图1 传统行星近旁引力甩摆轨道示意图

Fig. 1 Sketch map for the traditional flyby trajectory around a major planet

进一步揭示不规则小天体引力场内的动力学特性，为人们更好地了解小天体及未来的探测任务设计提供参考^[8]。

综上，本文将采用偶极子模型来近似细长形小天体的引力场，通过改变偶极子模型参数来得到不同小天体的引力场分布，以此给出这一类小天体引力场中广义甩摆轨道共有的动力学特性。文中从轨道能量变化的角度入手，基于偶极子模型解析形式的引力势函数，分析甩摆轨道的动力学机理，并给出一个简单的仿真算例。

1 广义甩摆轨道

偶极子模型(rotating mass dipole)最早由前苏联学者Chermnykh于1987年提出，是一个由双质点组成的旋转系统，其中两质点由一根长度固定的无质量细杆相连，因此偶极子问题又被称为“Chermnykh Problem”^[9]。Chermnykh最初研究了平面偶极子模型中三角平动点及其稳定性问题，之后Kokoriev和Kirpichnikov(1988)应用该模型近似一个旋转对称哑铃体，研究了一个哑铃体和一个球体组成系统的平衡点及其稳定性问题，该问题也被称为“KK Problem”^[9-10]。波兰的Goździewski等(1988)进一步讨论了上述问题的可能应用及共振情形等，并将该问题推广至一个球体和一个椭球体组成的动力学系^[12]。本文采用偶极子模型近似细长形小天体^[13]，对于均匀自旋的小天体而言，其引力场内的质点在随体系下的轨道动力学方程为

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = -\nabla V \quad (1)$$

方程(1)采用了归一化单位，长度单位LU为偶极子模型两质点间距 d ，时间单位TU约为 ω^{-1} ，质量单位MU为系统总质量 $M=m_1+m_2$ ，从而使得引力常数 $G=1$ 。式中 \mathbf{r} 为质点到偶极子质心的向径， $\boldsymbol{\omega}$ 为小天体自旋角速度矢量，其右端项对应的有效势函数为

$$V = -\frac{(x^2 + y^2)}{2} - \kappa \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \quad (2)$$

方程(2)中 μ 为质量比常数，其定义为 $\mu=m_2/M$ 。方程(1)在形式上与圆形限制性三体问题方程一致，但其有效势式(2)中却比后者多出了一个无量纲的参数 κ ，其定义为

$$\kappa = \frac{GM}{\omega^2 d^3} \quad (3)$$

表征着中心引力与离心力的比值，当比值为1时，方程(1)与圆形限制性三体问题完全一致。方程(1)存在雅克比积分

$$C = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + V \quad (4)$$

质点在小天体引力场内运行时，其对应的机械能

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\|^2 + U \\ &= \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\|^2 - \kappa \left(\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

显然，式(5)中右端第一项为质点在惯性系中的动能，第二项为其引力势能。将雅克比积分式(4)代入式(5)，化简后可得

$$E = C + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = C + \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}})] \quad (6)$$

其中： \mathbf{L} 为质点的轨道角动量，轨道能量及角动量均是采用随体系下的量表示出来的，其对应的轨道能量变化率为

$$p(\mathbf{r}) = \frac{dE}{dt} = \frac{dC}{dt} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{L} + \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (7)$$

联立式(6)和式(7)，可得

$$p(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (-\mathbf{r} \times \nabla U) = \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r} \times (-\nabla U)] \quad (8)$$

式(8)中 U 为中心天体的引力势能。式(8)表明，当中心天体确定后，其引力场内的能量变化率仅与质点在其随体系下的向径相关。考虑小天体赤道面内逆时针运行的轨道，其发生广义甩摆时轨道周期与小天体自旋周期通常在短期内成简单整数比关系，如2/3、3/4、1/1、3/1等。经过甩摆后，原来位于环绕轨道上的质点可能在小天体自旋一周内即被抛射而进入逃逸轨道，相反地也有可能由双曲轨道而被(暂时)捕获至小天体引力场内。上述甩摆作用一般作用时间较短，

而且受到小天体不规则引力场的影响，很难准确预测下一次甩摆发生的时刻，因此，下文将研究重点放在周期比近似为1:1的单次甩摆轨道上。

质点在小天体引力场中发生甩摆时，若其轨道周期与小天体自旋周期在短时间内近似满足1:1的关系，我们称之为单次甩摆轨道。在小天体随体系下看，质点在甩摆作用的短期内仿佛悬停在了小天体某一点的上方，为此，单次甩摆轨道应满足

$$\dot{\mathbf{r}}_s \approx \mathbf{0} \quad (9)$$

即随体系下的相对速度近似为零，式(9)中 \mathbf{r}_s 为小天体质心指向绕飞质点的向径。假设甩摆的有效作用时间为 t_s (为一较短时间)，由于相对速度基本不变，轨道能量的变化可近似表达为

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{p}(\mathbf{r}_s) \cdot d\mathbf{t} \approx \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r} \times (-\nabla U)] \cdot t_s \quad (10)$$

式(9)清晰地反映了广义甩摆轨道的动力学机理，即小天体不规则引力梯度力矩在质点绕飞过程中持续做功。以前人们更多关注的是二体问题中，中心天体(质点)的引力梯度力矩对质量不对称卫星姿态的影响^[14]，而本文则是讨论不规则中心天体对绕飞质点的轨道影响。上述结论与Scheeres等关于Castalia附近的该类轨道一致，且更为直观和深入。Scheeres等(1996)基于传统的二阶二次引力场，指出该类轨道的成因是由于中心天体 C_{22} 项的持续作用，而实际上 C_{22} 项对应的恰是中心天体质量在赤道面内的非对称分布^[4]。综上，广义甩摆轨道与传统行星借力相比，至少有如下几点不同：一是甩摆前后质点相对中心天体的速度发生了改变；二是动力学机理不一样；三是作用时间很短，在小天体一个自旋周期内轨道性态即可发生明显改变。为此，广义甩摆轨道实际上是旋转不规则引力场内一类特殊的动力学行为。

2 仿真算例及分析

本节以216 Kleopatra小行星为例，给出一条广义甩摆轨道。Kleopatra是主带小行星中较大的一颗，应用多面体法计算其引力势时三维尺寸为225 km × 98 km × 85 km，自转周期为5.385 h，总质量约为 2.55×10^{18} kg。应用偶极子近似其外部引力场分布的参数分别为 $\mu = 0.486\ 298$ 和 $\kappa = 0.883\ 478$ ^[13]，在给定参数下，偶极子引力场分布关于 oxy 和 oyz 平面对称的，仿真中以近拱点在第II象限(本例中可理解为惯性系下第二象限)的甩摆轨道为例，其在小天体随体系 $oxyz$ 下的轨迹如图2所示。示例轨道的雅克比积分值在无量纲

系统下为 $-1.537\ 6$ ，其在随体系下的近拱点坐标为 $[-1.011\ 3, 0.734\ 7]^T$ 。

图2中同时给出了甩摆轨道对应的能量变化曲线，可以看到轨道能量从最初的负值经甩摆后大幅增加，达到正值后逃离小天体引力场。在归一化的量纲下，小天体自旋一周的时间为 2π ，图2中所示甩摆作用时间约为4 TU，即质点在小天体一个自旋周期内从环绕轨道改变为双曲轨道。相反，若该甩摆轨道的近拱点位于第I或III象限，坐标为 $[1.011\ 3, 0.734\ 7]^T$ 或 $[-1.011\ 3, -0.734\ 7]^T$ ，质点将从一个双曲轨道被(临时)捕获至一个环绕轨道。将上述物理量转换至实际量纲下，发现图3中绕飞质点从惯性系(甩摆轨道近拱点对应时刻的随体系)下最初的速度12 m/s经甩摆后增加至约30 m/s(仿

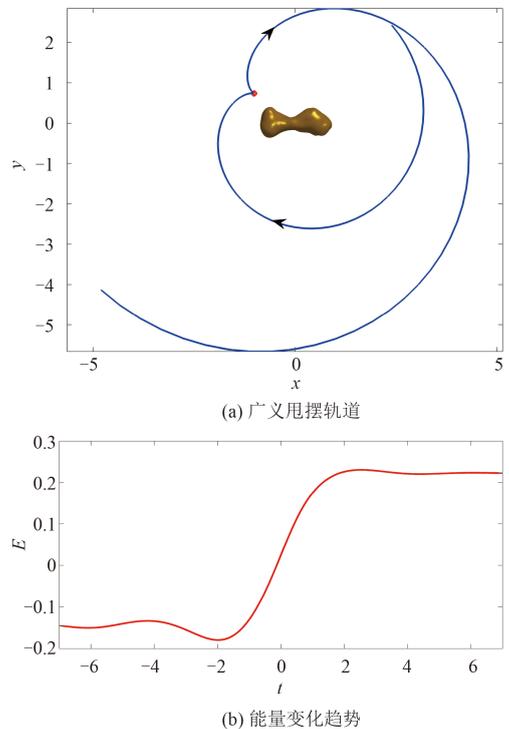


图2 小行星Kleopatra随体系下广义甩摆轨道及其能量变化趋势
Fig. 2 Generalized flyby trajectory in the body-fixed frame of the asteroid 216 Kleopatra and the variation of its orbital energy in dimensionless units

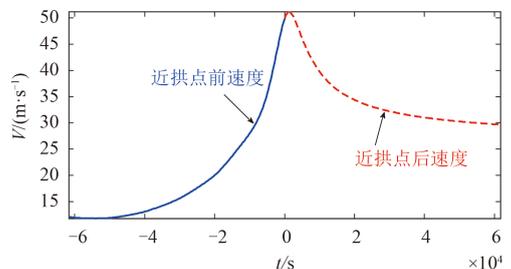


图3 小天体惯性系下广义甩摆轨道的速度变化
Fig. 3 Orbital velocity variation of the generalized flyby trajectory in the inertial frame

真总时长约为6个小天体自转周期, 甩摆作用时间仅0.6个自转周期), 这对于小天体附近探测器也是一个较大的速度增量。为此, 在小天体探测任务设计中, 要提前分析以避免航天器进入该类轨道。

小天体附近的轨道大致可以归为3类, 长期绕飞轨道、逃逸轨道及小天体表面撞击轨道。运行在初始绕飞轨道上的质点, 有可能经过单次甩摆作用后改变至逃逸轨道上, 该类轨道称之为自然逃逸轨道或抛射轨道(natural ejecting orbits), 是小天体在短期内清除引力场内粒子或异物等的重要力学机制。显然, 该类轨道初始时刻的轨道能量为负值, 经过短期的甩摆作用后能量增加为正值, 即如图2中所示轨道。该类轨道对于小天体附近长期绕飞的航天器而言, 是需要避免的危险轨道, 在设计之初即需排除。

限于篇幅, 本文只从理论上给出了广义甩摆轨道的简单解释, 并基于偶极子模型给出了一条示例轨道。关于该类轨道更多的讨论, 包括作为航天器逃逸轨道以及其他简单整数比关系的甩摆轨道等, 值得后续深入研究, 为揭示小天体附近动力学机理及航天器探测轨道设计提供理论参考。

3 结论及展望

广义甩摆轨道是旋转不规则引力场内一类特殊的动力学现象。本文以具有典型不规则外形的细长形小天体为例, 揭示了其引力场内的广义甩摆轨道的动力学机理, 分析了该类轨道与传统行星甩摆轨道的不同。以偶极子模型近似细长形小天体引力场, 基于解析的引力势表达式, 推导得出甩摆作用是由于不规则引力梯度力矩在旋转过程中做功所致。仿真验证了轨道增量的变化趋势, 即在小天体自旋一周内绕飞质点的能量由负变正。该类轨道作为绕飞探测航天器的危险轨道, 需在任务设计之初予以避免。

参 考 文 献

- [1] Sims J A, Longushi J M, Staugler A J. V_{∞} leveraging for interplanetary missions: multiple-revolution orbit techniques[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1997, 20(3): 409–415.
- [2] 李俊峰, 宝音贺西, 蒋方华. 深空探测动力学与控制[M]. 北京: 清华

大学出版社, 2014.

- Li J F, Baoyin H X, Jiang F H. Dynamics and control of interplanetary flight[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2014.
- [3] Zeng X Y, Alfriend K T, Li J F, et al. Optimal solar sail trajectory analysis for interstellar missions[J]. *Journal of the Astronautical Sciences*, 2012, 59(3): 502–516.
- [4] Scheeres D J, Ostro S J, Hudson R S, et al. Orbits close to asteroid 4769 Castalia[J]. *Icarus*, 1996(121): 67–87.
- [5] Yu Y, Baoyin H X. Resonant orbits in the vicinity of asteroid 216 Kleopatra. *astrophys[J]. Space Sci.*, 2013, 343(1): 75–82.
- [6] Wang X Y, Gong S P, Li J F. A method for classifying orbits near asteroids[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2014, 30(3): 316–325.
- [7] Tricarico P, Sykes M V. The dynamical environment of Dawn at Vesta[J]. *Planetary and Space Science*, 2010(58): 12–38.
- [8] 崔平远, 乔栋. 小天体附近轨道动力学与控制研究现状与展望[J]. *力学进展*, 2013, 43 (5): 526–539.
- Cui P Y, Qiao D. Research progress and prospect of orbital dynamics and control near small bodies. [J]*Advances in Mechanics*, 2013, 43(5): 526–539.
- [9] Chermnykh S V. On the stability of libration points in a certain gravitational field[J]. *Vest. Leningrad Univ.*, 1987, 2(8): 73–77.
- [10] Kokoriev A A, Kirpichnikov S N. On the stability of stationary triangular Lagrangian motions in the system of two attracting bodies: an axisymmetrical, peer-like and spherically symmetric[J]. *Vest. Leningrad Univ.*, 1988, 1(1): 75–84.
- [11] Kirpichnikov S N, Kokoriev A A. On the stability of stationary collinear Lagrangian motions in the system of two attracting bodies: an axisymmetrical, peer-like and spherically symmetric[J]. *Vest. Leningrad Univ.*, 1988, 3(1): 72–84.
- [12] Goździewski K, Maciejewski A J. Nonlinear stability of the Lagrangian libration points in the Chermnykh problem[J]. *Cele. Mech. Dyn. Astron.*, 1998, 70(1): 41–58.
- [13] Zeng X Y, Jiang F H, Li J F, et al. Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies[J]. *Astrophys. Space Sci.*, 2015, 356(1): 29–42.
- [14] 章仁为. 卫星轨道姿态动力学与控制[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998.
- Zhang R W. Dynamics and control of satellite orbit and attitude[M]. Beijing: Beihang University Press, 1998.

作者简介:

曾祥远(1985–), 男, 博士。主要研究方向: 最优控制理论及应用、轨道设计与优化、小天体相关动力学与控制等。

通信地址: 北京市海淀区北京理工大学中心教学楼1203室(100081)

电话: (010)68912460

E-mail: zxy0985@gmail.com

Generalized Flyby Trajectories over Irregular-Shaped Small Bodies

ZENG Xiangyuan¹, LI Junfeng², LIU Xiangdong¹

(1. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: This paper focuses on the elongated small body whose exterior potential is approximated by the rotating mass dipole. The study aims to discuss the characteristics of generalized flyby trajectories over these irregular-shaped small bodies. Different from the traditional gravity assist or swing-by trajectories, a test particle along the generalized flyby trajectory can be ejected into a hyperbolic trajectory from an elliptical orbit in a short duration or vice versa. The orbital energy variation is adopted to illustrate the dynamical behavior and obtain numerical simulations. Particularly, the name and dynamical problem of such a trajectory given in this paper are still open to further readers.

Key words: irregular-shaped small body; rotating mass dipole; generalized flyby trajectory

[责任编辑：宋宏]