多普勒跟踪测量用于时空引力检验的尝试：(Ⅰ)理论建模

邓雪梅[1]，谢懿[2,3]
(1. 中国科学院 紫金山天文台，南京 210008；2. 南京大学 天文与空间科学学院，南京 210093；
3. 上海市空间导航与定位技术重点实验室，上海 200030)

摘　要：作为多普勒跟踪测量用于时空引力检验的尝试，在多普勒建模过程中加入了对于局部洛仑兹不变性(LLI)以及局部位置不变性(LPI)的检验参数。LLI/LPI 是包括广义相对论在内的任何度规引力理论的基石。通过迭代求解多普勒建模过程中所需的光行时解，证明了只有在单程以及三程多普勒测量中可以检验 LLI 和 LPI。鉴于该种测量手段无需额外载荷以及我国测控精度，可以尝试通过单/三程多普勒测量来检验 LLI 和 LPI 的科学目标。

关键词：多普勒跟踪测量；引力；深空探测
中图分类号：P129　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：2095-7777(2015)02-0186-06
DOI：10.15982/j.issn.2095-7777.2015.02.014

0 引　言

作为目前测控与导航的极其重要手段之一，单程、双程以及三程多普勒跟踪测量已经成功地实施在许多探测任务中[1-2]。与此同时，多普勒测量数据还可用于各种各样的科学研究，比如基本物理学。通过测量卡西尼土星探测器与地球通讯过程中的频率变化，Bertotti 等(2003)[3]得到了太阳系中对于广义相对论验证的一个强有力限制。此外，多普勒跟踪测量很可能是测量低频引力波(10^{-5}～1 Hz)的唯一方式[4]。本文将主要探讨多普勒测量用于广义相对论最基本检验——爱因斯坦等效原理(EEP)——的可能性。

EEP 不但是建立广义相对论的基础，而且是涵义更为广泛的整个弯曲时空理论的基石。它包含三大要素[5]，分别是：弱等效原理(WEP)、局部洛仑兹不变性(LLI)和局部位置不变性(LPI)。它们的具体内涵如下：WEP，任何自引力可忽略物体的惯性质量等于它的引力质量；LLI，任何局部非引力实验的结果不依赖于该实验所在参考系的自由下落速度；LPI，任何局部非引力实验的结果不依赖于该实验所进行的时间和地点。其中 LLI 和 LPI 可以通过测量处于天体引力场中原子钟频率的变化来进行检验[6]。

1976 年，美国宇航局发射了引力探测器 A(GP－A)。该探测器携带了一台氢原子钟，其距离地面的高度为10 273 km。该实验主要是比较这台空间钟和地面钟之间的频率来检验 EEP，其精度约为 7×10^{-5}[7]。1980 年，“旅行者 1 号”/“旅行者 2 号”飞掠土星的过程中首次在地球以外引力场中检验了 EEP，其精度为 1%[8]。1990 年，伽利略木星探测器飞掠金星和地球的过程中在 0.5%精度下检验了 EEP[9]。

上述实验依赖于探测器同地面通信的单程多普勒测量。探测器上的转发频率参照星上频率标准，地面站接收的频率则参照地面频率标准。然而，对于探测器跟踪精度而言单程多普勒测量存在许多问题。星上频率标准没有地面频率标准稳定，且受到自身噪声影响。解决方案之一是使用双程多普勒测量。在双程模式中，地面站参照一个高质量频率标准来发射一个无线电信号。随后，探测器接收到这个信号并通过相位相干转发到地面站。转发过程中加入目前观测中可忽略不计的噪声，这个转发过程并不需要在探测器上放上一个好的原子钟[4]。双程

收稿日期：2014-10-14　修回日期：2015-02-10
基金项目：国家自然科学基金(11473027，11103085)；江苏省自然科学基金(BK20131461)；上海市空间导航与定位技术重点实验室基金(14DZ2276100)

多普勒测量形成了信号的一个封闭循环。相反,三程模型的发射站和接收站不是同一个。因此,三程多普勒测量形成了信号的一个开放循环。

本文在单程多普勒测量模型基础上,主要给出考虑 LLI/LPI 在内的双/三程多普勒建模过程;通过光行时求解星上发射时刻;针对我国未来有望实施的金/火星探测任务,就在广义相对论实验检验中可开展的自主研究与实践给出建议。

1　模　型

本节将从单程多普勒模型出发[9],建立在太阳系质心参考系(BCRS)下考虑了 LLI/LPI 效应的双/三程多普勒跟踪测量模型。

1.1　单程多普勒建模

EEP 预言了频率变化[10]。观测到的红移量 z 定义如下

$$1+z=\frac{\nu_R(t_R)}{\nu_E(t_E)} \tag{1}$$

其中:$\nu_E(t_E)$是在 t_E 时的发射频率;$\nu_R(t_R)$是在 t_R 时的接收频率。

在下面推导中,除非有特别说明,否则忽略掉计算量中的时刻,如 $\nu_E\equiv\nu_E(t_E)$,$\nu_R\equiv\nu_R(t_R)$。在 ε^2 阶数上(其中 $\varepsilon\equiv 1/c$,c 为光速),方程(1)为[11]

$$\begin{aligned}\frac{\nu_R}{\nu_E}=&1+\varepsilon\vec{K}\cdot[\vec{v}_R(t_R)-\vec{v}_E(t_E)]-\\&\varepsilon^2[\vec{K}\cdot\vec{v}_R(t_R)][\vec{K}\cdot\vec{v}_E(t_E)]+\varepsilon^2[\vec{K}\cdot\vec{v}_E(t_E)]^2+\\&\frac{1}{2}\varepsilon^2[v_R^2(t_R)-v_E^2(t_E)]+\\&\varepsilon^2\{U[\vec{y}_R(t_R)]-U[\vec{y}_E(t_E)]\}+O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{2}$$

其中:$\vec{y}_R$、$\vec{y}_E$ 分别代表信号接收和发射的位置矢量;$\vec{v}_R$、$\vec{v}_E$ 分别代表信号接收和发射的速度矢量;t_R、t_E 分别代表信号接收和发射时刻;$\vec{K}$为单位矢量

$$\vec{K}=-\frac{\vec{y}_R(t_R)-\vec{y}_E(t_E)}{|y_R(t_R)-y_E(t_E)|} \tag{3}$$

此外,式(2)中$U[\vec{y}_R(t_R)]$和$U[\vec{y}_E(t_E)]$分别代表接收和发射时的牛顿引力势,这两个引力势包含了引力 N 体的贡献,即

$$\begin{aligned}U[\vec{y}_R(t_R)]&=\sum_A U_A[\vec{y}_R(t_R)]\\U[\vec{y}_E(t_E)]&=\sum_A U_A[\vec{y}_E(t_E)]\end{aligned} \tag{4}$$

式(2)中,速度项全部源自狭义相对论,而引力项则源自广义相对论。

为了检验 LLI/LPI,单程多普勒测量模型为

$$\begin{aligned}\frac{\nu_R}{\nu_E}=&1+\varepsilon\vec{K}\cdot[\vec{v}_R(t_R)-\vec{v}_E(t_E)]-\\&\varepsilon^2[\vec{K}\cdot\vec{v}_R(t_R)][\vec{K}\cdot\vec{v}_E(t_E)]+\varepsilon^2[\vec{K}\cdot\vec{v}_E(t_E)]^2+\\&\frac{1}{2}\varepsilon^2[\beta_R v_R^2(t_R)-\beta_E v_E^2(t_E)]+\\&\varepsilon^2\Big\{\sum_A\alpha_R^A U_A[\vec{y}_R(t_R)]-\sum_A\alpha_E^A U_A[\vec{y}_E(t_E)]\Big\}+\\&O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{5}$$

式(5)描述了频率变化中 LLI/LPI 破坏的可能性。其中,LLI 的破坏由参数 $\beta_{\mathrm{R/E}}$体现。如果 LLI 成立,则 $\beta_{\mathrm{R/E}}=1$。LPI 的破坏由参数 $\alpha_{\mathrm{R/E}}^{\mathrm{A}}$体现。如果 LPI 成立,则 $\alpha_{\mathrm{R/E}}^{\mathrm{A}}=1$。

为了分离代表 LLI/LPI 破坏的量,引入如下定义:$\bar{\beta}_{\mathrm{R/E}}=\beta_{\mathrm{R/E}}-1$,$\bar{\alpha}_{R/E}^A=\alpha_{R/E}^A-1$。这样式(5)可写成如下形式

$$\left.\frac{\nu_R}{\nu_E}\right|_{E\to R}\equiv F_{E\to R}(t_E,t_R)=\hat{F}_{E\to R}(t_E,t_R)+\bar{F}_{E\to R}(t_E,t_R)+O(\varepsilon^3) \tag{6}$$

其中:$\hat{F}_{E\to R}(t_E,t_R)$代表广义相对论所预言的频率变化,即式(2);$\bar{F}_{E\to R}(t_E,t_R)$代表 LLI/LPI 破坏引起的项

$$\begin{aligned}\bar{F}_{E\to R}(t_E,t_R)=&\frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\beta}_R v_R^2(t_R)-\frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\beta}_E v_E^2(t_E)+\\&\varepsilon^2\sum_A\bar{\alpha}_R^A U_A[\vec{y}_R(t_R)]-\varepsilon^2\sum_A\bar{\alpha}_E^A U_A[\vec{y}_E(t_E)]\end{aligned} \tag{7}$$

下面通过式(6)来建立包含 LLI/LPI 在内的双/三程多普勒测量模型。

1.2　双程多普勒建模

在双程多普勒跟踪测量中,地面站 S 在 t_E 时发射的信号频率为 ν_E;探测器 P 在 t' 时接收到这个信号,其频率为 ν';随后,探测器 P 立即将接收到的频率乘以 q 转发(q 为已知的两个整数之比),此时发射的频率为 $q\nu'$;最后,地面站 S 在 t_R 时接收到这个信号频率为 ν_R。整个过程可以看成是两个单程测量,即

$$\left.\frac{\nu_R}{q\nu_E}\right|_{S\to P\to S}=\frac{\nu'}{\nu_E}\cdot\frac{\nu_R}{q\nu'}=F_{S\to P}(t_E,t')\cdot F_{P\to S}(t',t_R)+O(\varepsilon^3) \tag{8}$$

将两个依赖不同发射时刻及接收时刻的单程多普勒测量模型代入式(8),便可得到双程多普勒测量的详细表达式。

1.3　三程多普勒建模

在三程多普勒测量中,存在两个地面站。地面站 S_1 发射信号,地面站 S_2 接收由探测器 P 转发的这个信号。在这个开放循环中,频率移动为

$$\left.\frac{\nu_R}{q\nu_E}\right|_{S_1\to P\to S_2}=\frac{\nu'}{\nu_E}\cdot\frac{\nu_R}{q\nu'}=$$
$$F_{S_1\to P}(t_E,t')\cdot F_{P\to S_2}(t',t_R)+O(\varepsilon^3) \tag{9}$$

将两个依赖不同发射时刻及接收时刻的单程多普勒测量模型代入式(9),便可得到三程多普勒测量的详细表达式。

虽然上述理论模型已经建立,但这些模型并不能直接应用,其原因是探测器上的发射时刻 t' 不可知,它需要通过光行时求解并最终使建立的模型全部依赖于接收时刻 t_R[2]。

2 光行时解

光行时解是建立在信号往返时间间隔的基础上[2]。通常,发射时刻 t_E 和接收时刻 t_R 有如下关系

$$\Delta t\equiv(t_R-t_E)=\varepsilon\left|\vec{y}_R(t_R)-\vec{y}_E(\mathrm{t}_E)\right|+$$
$$\varepsilon^3\Delta T_{\mathrm{Shapiro}}+O(\varepsilon^5) \tag{10}$$

其中:第二项为弯曲时空引起的 Shapiro 时间延迟[12]。当信号由木星发出并近距离经过太阳,最终到达地球,由太阳造成的 Shapiro 时延会达到 10^{-4} s;当信号由土星发出并近距离经过木星,最终到达地球,由木星造成的 Shapiro 时延会达到 10^{-7}秒;对于单程情况,当信号由土星发出并近距离经过地球而到达地面站,由地球造成的 Shapiro 时延会达到 10^{-10} s。太阳系中 Shapiro 时延的量级要比多普勒测量中发射和接收的平移运动以及转动时标小很多,因此在光行时解中可以忽略掉 Shapiro 时延,即

$$\Delta t\equiv(t_R-t_E)=\varepsilon\left|\vec{y}_R(t_R)-\vec{y}_E(t_E)\right|+O(\varepsilon^3) \tag{11}$$

可以通过迭代方法数值求解发射时刻,在本文中我们采用分析方法求解。在多普勒测量中,发射者和接收者的轨道运动时标通常远大于光线传播的时标(即,光行时)Δt,因此可以得到如下关系

$$\vec{y}_R(t_R)\equiv\vec{y}_R(t_E+\Delta t)=\vec{y}_R(t_E)+$$
$$\vec{v}_R(t_E)\Delta t+\frac{1}{2}\vec{a}_R(t_E)\Delta t^2+O(\Delta t^3) \tag{12}$$
$$\vec{y}_E(t_E)\equiv\vec{y}_E(t_R-\Delta t)=\vec{y}_E(t_R)-$$
$$\vec{v}_E(t_R)\Delta t+\frac{1}{2}\vec{a}_E(t_R)\Delta t^2+O(\Delta t^3) \tag{13}$$

太阳系中最大加速度出现在太阳附近($\vec{a}\approx$ 25～274 m·s^{-2})以及木星附近($\vec{a}\approx$28 ms^{-2})[2]。只要 $\vec{a}\approx$25 m·s^{-2}探测器和地面站远离这些区域,式(12)和(13)中的加速度项便可以忽略[2]。例如,式(13)变成

$$\vec{y}_E(t_E)\equiv\vec{y}_E(t_R-\Delta t)=$$
$$\vec{y}_E(t_R)-\vec{v}_E(t_R)\Delta t+O(\Delta t^2) \tag{14}$$
$$\Delta t=\varepsilon\left|\vec{y}_R(t_R)-\vec{y}_E(t_R)\right|+O(\varepsilon^3) \tag{15}$$

实际应用中,多普勒模型可以仅依赖于接收时刻。

2.1 考虑光行时解的单程多普勒建模

根据式(14)和(15),随接收时刻 t_R 变化的单程多普勒模型可写成

$$\left.\frac{\nu_R}{\nu_E}\right|_{E\to R}\equiv F_{E\to R}(t_E,t_R)=$$
$$F_{E\to R}\left[t_R-\varepsilon\left|\vec{y}_R(t_R)-\vec{y}_E(\mathrm{t}_R)\right|,t_R\right]+O(\varepsilon^3) \tag{16}$$

为了获得详细表达式,需要将单位矢量 $\vec{K}$(式(3))展开成

$$\vec{K}=-\vec{n}_{RE}(t_R)-$$
$$\varepsilon\{\vec{v}_E(t_R)-[\vec{n}_{RE}(t_R)\cdot\vec{v}_E(t_R)]\vec{n}_{RE}(t_R)\}+$$
$$O(\varepsilon^2) \tag{17}$$

其中:$\vec{n}_{RE}=\vec{R}_{RE}(t_R)/R_{RE}(t_R)$;$\vec{R}_{RE}(t_R)=\vec{y}_R(t_R)-\vec{y}_E(t_R)$;$R_{RE}(t_R)=|\vec{R}_{RE}(t_R)|$。

于是,可得到考虑 LLI/LPI 破坏下单程多普勒测量随接收时刻 t_R 的变化

$$\left.\frac{\nu_R}{\nu_E}\right|_{E\to R}=F_{E\to R}\left[t_R-\varepsilon\left|\vec{y}_R(t_R)-\vec{y}_E(t_R)\right|,t_R\right]+$$
$$O(\varepsilon^3)=1-\varepsilon\vec{n}_{RE}(t_R)\cdot\vec{v}_{RE}(t_R)-\varepsilon^2\vec{v}_E(t_R)\times$$
$$\vec{v}_R(t_R)-\varepsilon^2\vec{n}_{RE}(t_R)\cdot\vec{a}_E(t_R)R(t_R)+\frac{1}{2}\varepsilon^2v_R^2(t_R)+$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon^2v_E^2(t_R)+\varepsilon^2\sum_A U_A[\vec{y}_R(t_R)]-$$
$$\varepsilon^2\sum_A U_A[\vec{y}_E(t_R)]+\frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\beta}_R v_R^2(t_R)-$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\beta}_E v_E^2(t_R)+\varepsilon^2\sum_A\bar{\alpha}_R^A U_A[\vec{y}_R(t_R)]-$$
$$\varepsilon^2\sum_A\bar{\alpha}_E^B U_A[\vec{y}_E(t_R)]+O(\varepsilon^3) \tag{18}$$

其中:$\vec{v}_{RE}=\vec{v}_R-\vec{v}_E$。由 EEP 预言的可能红移 z 偏差为

$$\delta z\big|_{E\to R}\equiv\left.\frac{\nu_R}{\nu_E}\right|_{E\to R}-\left.\frac{\nu_R}{\nu_E}\right|_{E\to R}^{\mathrm{EEP}}+O(\varepsilon^3)=$$
$$\frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\beta}_R\vec{v}_R^2(t_R)-\frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\beta}_E\vec{v}_E^2(t_R)+$$
$$\varepsilon^2\sum_A\bar{\alpha}_R^A U_A[\vec{y}_R(t_R)]-\varepsilon^2\sum_A\bar{\alpha}_E^A U_A[\vec{y}_E(t_R)]+$$
$$O(\varepsilon^3) \tag{19}$$

目前我国测控系统中多普勒测量精度在地月、

地火距离上的最优精度约为 1 mHz，这里以 X 波段(8.4 GHz)为例，可得到多普勒跟踪测量的相对误差约为$\delta z|_{E\to R}\approx 1.19\times 10^{-13}$。对于地月单程多普测量而言，在忽略 LPI 的情况下，可估计对于 LLI 的测量精度约为$\bar{\beta}_R=\bar{\beta}_E\approx\frac{c^2\delta z|_{E\to R}}{\vec{v}_\oplus\cdot\vec{V}_{\mathrm{Moon}}}=3.6\times10^{-4}$，这里$\vec{v}_\oplus=3\times10^4\ m/s$ 为地球的公转速度，$\vec{V}_{Moon}=10^3\ m/s$ 为月球的公转速度；同理，对于地火单程多普测量而言，可估计对于 LLI 的测量精度约为 $\bar{\beta}_{\mathrm{R}}=\bar{\beta}_{\mathrm{E}}\approx\frac{2c^2\delta z|_{E\to R}}{[\vec{v}_\oplus^2-\vec{v}_{Mars}^2]}=6.6\times10^{-5}$，这里 $\vec{v}_{\mathrm{Mars}}=2.4\times10^4$ m/s 为火星的公转速度。在忽略 LLI 的情况下，可看出引力势中太阳起着最大贡献，可估计地月单程多普勒测量中对于 LPI 的测量精度约为 $\bar{\alpha}_R^{\odot}=\bar{\alpha}_E^{\odot}\approx\frac{c^2\delta z|_{E\to R}}{\frac{Gm_\odot}{|\vec{y}_\odot-\vec{y}_\oplus|}-\frac{Gm_\odot}{|\vec{y}_\odot-\vec{y}_{\mathrm{Moon}}|}}=4.8\times10^{-3}$，这里$|\vec{y}_\odot-\vec{y}_\oplus|\approx 1\mathrm{au}$，$|\vec{y}_\odot-\vec{y}_{\mathrm{Moon}}|\approx 1\mathrm{au}+3.8\times10^8$ m；对于地火单程多普测量而言，可估计对于 LPI 的测量精度约为 $\bar{\alpha}_R^{\odot}=\bar{\alpha}_E^{\odot}\approx\frac{c^2\delta z|_{E\to R}}{\frac{Gm_\odot}{|\vec{y}_\odot-\vec{y}_\oplus|}-\frac{Gm_\odot}{|\vec{y}_\odot-\vec{y}_{\mathrm{Mars}}|}}=3.6\times10^{-5}$，这里$|\vec{y}_\odot-\vec{y}_{\mathrm{Mars}}|\sim 1.5\mathrm{au}$。可见，在单程多普勒中可以同时测量 LLI 和 LPI。然而，由于星载频率标准的稳定度和准确度不高，因此单程多普勒测量用于检验 LLI 和 LPI 的效果还需要针对具体的探测任务进行详细地评估。

2.2　考虑光行时解的双程多普勒建模

在双程多普勒测量中，考虑光行时解的模型建立如下

$$\left.\frac{\nu_R}{q\nu_E}\right|_{S\to P\to S}=F_{S\to P}(t_E,t')\cdot F_{P\to S}(t',t_R)+O(\varepsilon^3)= F_{S\to P}(t'-\varepsilon|\vec{y}_P(t')-\vec{y}_S(t')|,t')\cdot F_{P\to S}(t',t_R)+O(\varepsilon^3)\tag{20}$$

把 $t'=t_R-\varepsilon|\vec{y}_S(t_R)-\vec{y}_P(t_R)|$代入式(20)并将其按照 ε 展开，可得到

$$\left.\frac{\nu_R}{q\nu_E}\right|_{S\to P\to S}=1-\varepsilon 2\,\vec{n}_{PS}(t_R)\cdot\vec{v}_{PS}(t_R)+\varepsilon^2 2\vec{v}_{PS}^2(t_R)+\varepsilon^2 2\,[\vec{n}_{PS}(t_R)\cdot\vec{a}_{PS}(t_R)]\,R_{PS}(t_R)+O(\varepsilon^3)\tag{21}$$

其中：$\vec{a}_{PS}=\vec{a}_P-\vec{a}_S$。从式(21)可以看出，目前精度下双程多普勒测量中不能用来检验 LLI/LPI。在双程中 LLI/LPI 的破坏会出现在更高阶上：$\delta z|^{\mathrm{EEP}}_{S\to P\to S}=O(\varepsilon^3)$。

2.3　考虑光行时解的三程多普勒建模

同单/双程建模类似，考虑光行时解的三程多普勒测量模型如下

$$\begin{aligned}\left.\frac{\nu_R}{q\nu_E}\right|_{S_1\to P\to S_2}&=1-\varepsilon[\vec{n}_{PS_1}(t_R)\cdot\vec{v}_{PS_1}(t_R)+\vec{n}_{PS_2}(t_R)\cdot\vec{v}_{PS_2}(t_R)]+\varepsilon^2\Big[R^P_{S_1S_2}(t_R)v^2_{PS_1}(t_R)-\\&\vec{v}_P(t_R)\cdot\vec{v}_{S_1}(t_R)-\vec{v}_P(t_R)\cdot\vec{v}_{S_2}(t_R)+v_P^2(t_R)+\frac{1}{2}v^2_{S_1}(t_R)+v^2_{S_2}(t_R)\Big]+\\&\varepsilon^2\{[\vec{n}_{PS_1}(t_R)\cdot\vec{v}_{PS_1}(t_R)]\,[\vec{n}_{PS_2}(t_R)\cdot\vec{v}_{PS_2}(t_R)]-R^P_{S_1S_2}(t_R)\,[\vec{n}_{PS_1}(t_R)\cdot\vec{v}_{PS_1}(t_R)]\}_{PS}+\\&\varepsilon^2[\vec{n}_{PS_1}(t_R)\cdot\vec{a}_{PS_1}(t_R)R_{PS_2}(t_R)-\vec{n}_{PS_1}(t_R)\cdot\vec{a}_{S_1}(t_R)R_{PS_1}(t_R)+\vec{n}_{PS_2}(t_R)\cdot\vec{a}_P(t_R)R_{PS_2}(t_R)]+\\&\varepsilon^2\Big\{\sum_A U_A[\vec{y}_{S_2}(t_R)]-\sum_A U_A[\vec{y}_{S_1}(t_R)]\Big\}+\frac{1}{2}\varepsilon^2[\bar{\beta}_{S_2}v^2_{S_2}(t_R)-\bar{\beta}_{S_1}v^2_{S_1}(t_R)]+\\&\varepsilon^2\Big\{\sum_A\bar{\alpha}^A_{S_2}U_A[\vec{y}_{S_2}(t_R)]-\sum_A\bar{\alpha}^A_{S_1}U_A[\vec{y}_{S_1}(t_R)]\Big\}+O(\varepsilon^3)\end{aligned}\tag{22}$$

其中：$\vec{a}_{PS_{1/2}}=\vec{a}_P-\vec{a}_{S_{1/2}}$，$R^P_{S_2S_1}=\frac{R_{PS_2}(t_R)}{R_{PS_1}(t_R)}$。由 EEP 预言的可能红移 z 偏差为

$$\begin{aligned}\delta z|_{S_1\to P\to S_2}&\equiv\left.\frac{\nu_R}{q\nu_E}\right|_{S_1\to P\to S_2}-\left.\frac{\nu_R}{q\nu_E}\right|^{\mathrm{EEP}}_{S_1\to P\to S_2}+O(\varepsilon^3)=\\&\frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\beta}_{S_2}\vec{v}^2_{S_2}(t_R)-\frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\beta}_{S_1}\vec{v}^2_{S_1}(t_R)+\\&\varepsilon^2\sum_A\bar{\alpha}^A_{S_2}U_A[\vec{y}_{S_2}(t_R)]-\varepsilon^2\sum_A\bar{\alpha}^A_{S_1}U_A[\vec{y}_{S_1}(t_R)]+O(\varepsilon^3)\end{aligned}\tag{23}$$

从式(23)可以看出，三程多普勒测量中 LLI/LPI 破坏可能性仅依赖于两个测站的速度以及引力势。为了提高检验 LLI/LPI 实验的灵敏度，最好选择相对速度较大、引力势差别较大的两个测站进行三程多普勒测量。为了讨论探测的可能性，考虑如下特例：两个测站分别位于北极和赤道上；在这一构型中太阳的引力场需要考虑；进一步假设[9]：$\bar{\beta}_{S_1}=\bar{\beta}_{S_2}=\bar{\beta}\approx10^{-2}$，$\bar{\alpha}^{\odot}_{S_1}=\bar{\alpha}^{\odot}_{S_2}=\bar{\alpha}\approx10^{-2}$。可以得到

$$\delta z|_{S_1\to P\to S_2}=\frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\beta}\vec{v}^2_{S_2}(t_R)-\frac{1}{2}\varepsilon^2\bar{\beta}\vec{v}^2_{S_1}(t_R)+\varepsilon^2\sum_A\bar{\alpha}U_A[\vec{y}_{S_2}(t_R)]-\varepsilon^2\sum_A\bar{\alpha}U_A[\vec{y}_{S_1}(t_R)]\sim10^{-12}\tag{24}$$

同时也可以得到 $\delta v=c\delta z|_{S_1\to P\to S_2}{}^{-4}$ m·s^{-1}。这样的量级以目前多普勒测量技术而言是可以达到的。

下面仍然分析一下 LLI 和 LPI 在地月以及地火多普勒测量中的可观测性，仍然以 1 mHz 为目前我国测控系统中多普勒测量的最优精度为例，在 X 波段下多普勒跟踪测量的相对误差约为 $\delta z|_{S_1\to P\to S_2}\approx 1.19\times 10^{-13}$。对于地月以及地火三程多普测量而言，在忽略 LPI 的情况下，可估计对于 LLI 的测量精度约为 $\bar{\beta}\approx\frac{c^2\delta z|_{S_1\to P\to S_2}}{\vec{v}_\oplus\cdot[\vec{V}_{S_2}-\vec{V}_{S_1}]}=7.9\times 10^{-4}$，这里 $\vec{v}_\oplus=3\times 10^4$ m/s，$\vec{V}_{S_2}-\vec{V}_{S_1}=4.5\times 10^2$ m/s；同理，在忽略 LLI 的情况下，可估计地月、地火三程多普勒测量中对于 LPI 的测量精度约为

$$\bar{\alpha}^{\odot}\approx\frac{c^2\delta z|_{S_1\to P\to S_2}}{\frac{Gm_\odot}{|\vec{y}_\odot-\vec{y}_\oplus|}(\vec{y}_\odot-\vec{y}_\oplus)\cdot(\vec{Y}_{S_2}-\vec{Y}_{S_1})}=0.14$$

，这里 $\vec{Y}_{S_1}$ 和 $\vec{Y}_{S_2}$ 是两观测站在 GCRS 下的位置，$|\vec{y}_\odot-\vec{y}_\oplus|\approx 1$ au，$|\vec{Y}_{S_2}-\vec{Y}_{S_1}|\approx 2R_\oplus$，这里 $R_\oplus$ 为地球半径。可见，对于三程多普勒测量，以目前测量精度而言，对 LPI 的测量精度不高，这主要是由于两个测站均在地球上，它们之间引力势的差别太小所造成的。而三程多普勒测量用于检验 LLI 的效应是可观测的，准确地测量精度还需要针对具体的探测任务进行详细分析。

3 结 论

多普勒跟踪测量不但是保证许多探测器成功实施的任务支撑，还可用于探测任务的科学研究，如检验时空引力的基本性质。本研究工作从单程多普勒测量入手，推导出包含 LLI/LPI 在内的双/三程多普勒模型。进一步通过光行时方程求解星上发射时刻，最终获得了用于检验 LLI/LPI 的仅依赖于接收时刻的双/三程多普勒测量模型。

鉴于目前国际上已存在许多以时空引力研究为着眼点的探测任务，针对我国未来有望实施的金星/火星探测任务，最后我们就在广义相对论实验检验中可开展的自主研究与实践给出建议。简单来说，对时空引力的实验检验大致可分为 3 步。第 1 步，利用星上已有载荷。例如，针对有望于未来开展的我国自主火星/金星探测任务，使用多波段无线电通讯系统，开展以多普勒跟踪以及测距观测为基础的引力实验。第 2 步，研制专门载荷。搭载为检验某一效应而专门研制的载荷，例如高精度原子钟或者激光测距系统等。第 3 步，发射以检验广义相对论为首要科学目标的专门探测器。对于这 3 步而言，研发成本、硬件制造难度、科学产出以及任务潜在风险均逐级递增。对于我国尚处于起步阶段的空间探测计划，建议从第 1 步做起，在积累了足够的经验之后再实施后续难度更高的步骤，而且该步的优点在于无需额外载荷，这也为我国测控开展相关研究带来了可能性。以 X 波段为例，本文初步评估了在地月、地火多普勒测量中对于 LLI 和 LPI 探测的可能性。结论为：在单程多普勒中可以同时测量 LLI 和 LPI；在三程多普勒中以目前精度而言，仅可以测量 LLI。在我们后续的研究工作中，将会给出利用我国测控数据来检验时空引力的探测可能性。

参 考 文 献

[1] Catherine L. 深空导航无线电跟踪测量技术[M]. 李海涛，译. 北京：清华大学出版社，2005. [Catherine L. Deep space navigation radio tracking measurement technology[M]. Li H T, transl. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.]

[2] Moyer T D, Yuen J H. Formulation for observed and computed values of deep space network data types for navigation: jet propulsion laboratory, national aeronautics and space administration[M]. JPL Publication 00-7, 2000.

[3] Bertotti B, Iess L, Tortora P. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft[J]. Nature, 2003, 425(6956): 374－376.

[4] Armstrong J W. Low-frequency gravitational wave searches using spacecraft doppler tracking[J]. Living Reviews in Relativity, 2006, 9(1): 1－60.

[5] Will C M. Theory and experiment in gravitational physics [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1993.

[6] Krisher T P. New tests of the gravitational redshift effect [J]. Modern Physics Letters A, 1990, 5(23): 1809－1813.

[7] Vessot R F C, Levine M W, Mattison E M, et al. Test of relativistic gravitation with a space-borne hydrogen maser [J]. Physical Review Letters, 1980, 45(26): 2081－2084.

[8] Krisher T P, Anderson J D, Campbell J K. Test of the gravitational redshift effect at Saturn[J]. Physical Review Letters, 1990, 64(12): 1322－1325.

[9] Krisher T P, Morabito D D, Anderson J D. The Galileo solar redshift experiment [J]. Physical Review Letters, 1993, 70(15): 2213－2216..

[10] Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A. Gravitation[M]. San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1973.

[11] Brumberg V A. Essential relativistic celestial mechanics[M]. Bristol: Adam Hilger, 1991.

[12] Shapiro I I. Fourth test of general relativity[J]. Physical Review Letters, 1964, 13(26): 789－791.

作者简介：

邓雪梅(1978—)，女，博士，副教授，主要研究方向：相对论天

体测量。
通信地址:江苏省南京市北京西路 2 号(210008)
电话:(025)83332137
E-mail:xmd@pmo.ac.cn
谢懿(1981—),男,博士,副教授,主要研究方向:基本天文学。
通信地址:江苏省南京市汉口路 22 号南京大学天文与空间科学学院(210093)
电话:(025)89681230
E-mail:yixie@nju.edu.cn

The Trial of Probing Gravitation with Spacecraft Doppler Tracking :(I) Modeling

DENG Xuemei[1], XIE Yi[2,3]
(1. Purple Mountain Observatory, CAS, Nanjing 210008, China;
2. Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing 210093, China;
3. Shanghai Key Laboratory of Space Navigation and Position Techniques, Shanghai 200030, China)

Abstract:Currently two-way and three-way spacecraft Doppler tracking techniques are widely used and play important roles in control and navigation of deep space missions. Starting from a one-way Doppler model, we extend the theory to two-way and three-way Doppler models by making them include possible violations of the local Lorentz invariance (LLI) and the local position invariance (LPI) in order to test the Einstein equivalence principle, which is the cornerstone of general relativity and all other metric theories of gravity. After taking the finite speed of light into account, which is the so-called light time solution (LTS), we make these models depend on the time of reception of the signal only for practical convenience. We find that possible violations of LLI and LPI cannot affect two-way Doppler tracking under a linear approximation of LTS, although this approximation is sufficiently good for most cases in the solar system. We also know that, given the accuracy of measurement and control in China and no additional payload in this method, possible violations of LLI and LPI could be the scientific goals of Chinese measurement and control.

Key words: Doppler tracking; gravitation; deep space exploration

[责任编辑:高莎]