

# 小推力转移燃料消耗估计的机器学习方法

李海洋, 宝音贺西

(清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

**摘要:** 深空探测任务设计初段往往需要求解复杂的全局优化问题。小推力轨迹的设计与优化问题精确求解较为复杂, 求解速度较慢。由于计算能力与时间要求, 不可能在全局优化的过程中对每一个方案都进行精确的小推力数值求解, 所以在全局优化阶段需要对小推力转移进行快速准确地估计。采用机器学习的方法, 对燃料最优小推力转移的燃料消耗进行了估计, 其结果明显优于目前最为常用的 Lambert 估计方法。根据轨道描述方法的不同以及是否带有 Lambert 估计特征, 采用不同的特征组合进行机器学习, 分析结果发现带有 Lambert 估计特征的春分点轨道根数的特征组合为较好的机器学习特征组合。可为未来深空探测任务轨道设计提供参考。

**关键词:** 小推力; 燃料最优; 快速估计; 机器学习

中图分类号: TP18

文献标识码: A

文章编号: 2095-7777(2019)02-0195-06

DOI:10.15982/j.issn.2095-7777.2019.02.012

**引用格式:** 李海洋, 宝音贺西. 小推力转移燃料消耗估计的机器学习方法[J]. 深空探测学报, 2019, 6 (2): 195-200.

**Reference format:** LI H Y, BAOYIN H X. Machine learning method of estimation for fuel consumption of low-thrust transfers[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2019, 6 (2): 195-200.

## 引言

电推进与传统的化学推进相比, 具有比冲高、燃料质量消耗小等优点, 探测器可以携带更多的有效载荷。美国的“黎明号”探测器、日本的“隼鸟号”探测器等都采用了电推进方式。在探测任务的初始设计阶段, 往往有着大量的可选轨道设计方案, 每一届的国际轨道竞赛 (Global Trajectory Optimization Competition, GTOC) 和国内轨道竞赛的问题, 任务设计初期需要求解复杂的全局优化问题。

小推力轨迹的设计与优化问题, 相对于脉冲轨迹的设计与优化问题, 求解较为困难, 求解速度也较慢。由于计算能力与时间要求, 不可能在全局优化的过程中对每一个方案都进行精确的小推力数值求解, 这就需要对小推力转移进行快速准确的估计。最重要的是快速准确地估计小推力转移的燃料消耗。

考虑交会问题的燃料最优小推力转移。目前最为常用的估计方法, 是用双脉冲转移 Lambert 问题的速度增量来近似估计小推力转移的速度增量, 但是二者往往有着较大的误差。除此之外, Gatto 等提出了基于 Edelbaum 近似的估计方法<sup>[1]</sup>, 李海洋等同样基于 Edelbaum 提出了考虑  $J_2$  摄动下小推力多圈转移的估

计方法<sup>[2]</sup>。

本文提出一种基于轨道根数特征的机器学习的估计方法。机器学习作为人工智能的一个研究领域, 在轨迹优化领域也有应用<sup>[3-4]</sup>。Hennes 等<sup>[5]</sup>研究了机器学习方法估计小推力燃料消耗, 比较了不同的机器学习方法对估计结果的影响, 但是在机器学习方法中, 特征的选择对结果影响更为基础与重要, 主要创新点是研究不同的特征组合对于估计结果的影响。

本文使用第7届国际轨道竞赛的小天体数据<sup>[6]</sup>, 生成小推力转移数据库供机器学习使用, 选择不同的特征组合作为机器学习的特征, 学习完成后即可对燃料最优小推力转移燃料消耗进行准确快速估计。不同的特征组合结果不同, 但都明显优于 Lambert 估计方法。

## 1 小推力转移数据库生成

### 1.1 Lambert 估计

使用第7届国际轨道竞赛的小天体数据, 随机选取出发天体  $A_1$  和到达天体  $A_2$ , 在  $[0, 3\ 000]$  天内随机确定出发时刻  $t_s$ 、在  $[100, 300]$  天内随机确定转移时间  $\Delta t$ , 在  $[0.5, 1] \times m_{\text{initial}}$  内随机确定初始质量  $m_s$ 。燃料最优小推力问题较难求解, 不可能每次随机生成的

转移都可以采用小推力实现。所以, 首先求解双脉冲 Lambert 问题获得转移的速度增量, 满足一定条件的转移再使用小推力实现。

若求解双脉冲 Lambert 问题所得的速度增量为  $\Delta V_L$ , 小推力能产生的最大推力为  $T_{\max}$ , 如果满足下式

$$\Delta V_L < c \frac{T_{\max}}{m_s} \Delta t \quad (1)$$

则认为该段转移可以转为小推力求解。式中  $c$  的范围一般取 0.5~0.8 之间, 本文计算中取 0.7。

Lambert 估计的燃料消耗为

$$\Delta m_L = m_s \left( 1 - \exp \frac{-\Delta V_L}{I_{sp} g_0} \right) \quad (2)$$

## 1.2 燃料最优小推力转移

经过双脉冲 Lambert 估计筛选后, 可行的转移即可进行燃料最优小推力求解<sup>[7]</sup>。

探测器初末状态采用春分点轨道根数描述为

$$\begin{cases} x_1 = a(1 - e^2) \\ x_2 = e \cos(\Omega + \omega) \\ x_3 = e \sin(\Omega + \omega) \\ x_4 = \tan(i/2) \cos \Omega \\ x_5 = \tan(i/2) \sin \Omega \\ x_6 = \Omega + \omega + f \end{cases} \quad (3)$$

则小推力问题的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M} \frac{T_{\max} u}{m} \mathbf{a} + \mathbf{D} \\ \dot{m} = -\frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} u \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{M}$  为  $6 \times 3$  的矩阵, 未列元素为 0;  $\mathbf{D}$  为  $6 \times 1$  的向量。

对于交会问题, 约束条件为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_s \\ m(t_0) = m_s \\ \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \end{cases} \quad (5)$$

对于燃料最优问题, 优化指标为

$$J = \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \int_{t_0}^{t_f} u dt \quad (6)$$

本文采用间接法求解燃料最优小推力问题。为了更加快速有效地求解协态变量初值, 采用对数同伦方法与协态变量归一化技术<sup>[7]</sup>。

引入对数同伦参数  $\varepsilon$  和归一化协态变量  $\lambda_0$ , 指标函数变为

$$J = \lambda_0 \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \int_{t_0}^{t_f} \{u - \varepsilon \ln[u(1 - u)]\} dt \quad (7)$$

该最优控制问题的哈密顿函数为

$$H = \lambda_x^T \left( \mathbf{M} \frac{T_{\max} u}{m} \mathbf{a} + \mathbf{D} \right) - \lambda_m \frac{T_{\max} u}{I_{sp} g_0} + \lambda_0 \frac{T_{\max}}{I_{sp} g_0} \{u - \varepsilon \ln[u(1 - u)]\} \quad (8)$$

根据极大值原理, 可以求得最优控制率为

$$\begin{cases} \mathbf{a} = -\frac{\mathbf{M}^T \boldsymbol{\lambda}}{\|\mathbf{M}^T \boldsymbol{\lambda}\|} \\ u = \frac{2\varepsilon}{\rho + 2\varepsilon + \sqrt{\rho^2 + 4\varepsilon^2}} \end{cases} \quad (9)$$

其中: 开关函数  $\rho$  的表达式为

$$\rho = 1 - \frac{I_{sp} g_0 \|\mathbf{M}^T \boldsymbol{\lambda}\|}{\lambda_0 m} - \frac{\lambda_m}{\lambda_0} \quad (10)$$

协态方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i = -\frac{T_{\max} u}{m} \lambda_k \frac{\partial M_{kj}}{\partial x_i} \alpha_j - \lambda_k \frac{\partial D_k}{\partial x_i} - \lambda_k \frac{\partial M_{kj}}{\partial x_i} f_{pj} - \\ \lambda_k M_{kj} \frac{\partial f_{pj}}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad j = r, t, n \\ \dot{\lambda}_m = -\frac{T_{\max} u}{m^2} \|\mathbf{M}^T \boldsymbol{\lambda}\| \end{cases} \quad (11)$$

燃料最优小推力转移问题转换为求解协态变量初值的两点边值问题, 可以使用打靶法求解。打靶方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{z}) = [\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_f, \lambda_m(t_f), \|\boldsymbol{\lambda}(t_0)\| - 1]^T = 0 \\ \mathbf{z} = \boldsymbol{\lambda}(t_0) \end{cases} \quad (12)$$

当同伦参数  $\varepsilon$  从 1 减到 0, 问题即变为燃料最优问题。

## 2 机器学习方法

机器学习方法的本质可以理解为函数的拟合方法。对于燃料最优小推力转移问题, 其燃料消耗是初末轨道参数、初始质量与转移时间的函数, 但是该函数目前无法使用数学推导解析地获得准确形式。机器学习的过程则是构造拟合函数的过程, 学习完成后构造的拟合函数可以用来描述相应的数学问题。

本文中的数学问题则是在二体太阳引力场中, 给定小推力的最大推力和比冲, 已知某组初末轨道参数、初始质量与转移时间, 如何求解燃料消耗。只要满足该数学问题的场景, 均可以采用本文得到的机器学习拟合函数进行燃料消耗估计, 但是对于不同的场景, 函数的拟合度可能不同, 在实际使用过程中, 还

需要根据具体场景选择合适的学习数据。使用机器学习方法进行函数拟合的优势在于,机器学习方法对于复杂的函数关系可以有很好的描述,而解析公式必定会由于某些简化从而失去复杂函数关系的某些特性。机器学习有着较为成熟的工具包,本文计算采用Python语言的scikit-learn工具包<sup>[7]</sup>,参考为文献[5]中得到的结论使用Gradient Boosting回归器,最大深度选择为8。

根据第2节的计算方法,一共生成6万组燃料最优小推力转移,每组转移中包含了初末轨道参数、转移时间、初始质量和燃料消耗,其中,初末轨道参数、转移时间、始质量是基本变量,燃料消耗是希望通过机器学习获得的拟合函数的函数值。其中5万组用来进行学习燃料最优小推力转移燃料消耗,其机器学习标签即为燃料消耗质量;1万组用来进行检验机器学习估计的燃料消耗与小推力精确计算得到的燃料消耗的差异。

机器学习最重要的是特征参数的选择。燃料最优的小推力转移中,燃料消耗质量由探测器初始质量、转移时间,初始位置速度和末端位置速度决定。表1参数可以作为机器学习的特征。

表1 可选特征  
Table 1 Possible attributes

特征	解释
$rv_s/coe_s/ee_s$	初始位置速度/经典轨道根数/ 春分点轨道根数
$\Delta rv/\Delta coe/\Delta ee$	末端与初始位置速度/经典轨道根数/ 春分点轨道根数之差
$\Delta E, \Delta h$	末端与初始轨道能量与动量差异
$\Delta t$	转移时间
$m_s$	初始质量
$\Delta V_L$	Lambert估计的速度增量
$\Delta m_L$	Lambert估计的燃料消耗

本文选用表2中的7种特征组合进行分析,组合1表示的是利用位置速度的轨道描述方法作为特征,组合2表示的是利用经典轨道根数的轨道描述方法作为特征,组合3表示的是利用春分点轨道根数的轨道描述方法作为特征,组合4~6是在之前3组的基础上,再加上Lambert估计的速度增量和燃料消耗作为特征。组合7是在组合6的基础上考虑轨道积分中的能量与动量。

表2 6种特征组合  
Table 2 Six combinations of features

组合方式	特征
组合1	$rv_s, \Delta rv, \Delta t, m_s$
组合2	$coe_s, \Delta coe, \Delta t, m_s$
组合3	$ee_s, \Delta ee, \Delta t, m_s$
组合4	$rv_s, \Delta rv, \Delta t, m_s, \Delta V_L, \Delta m_L$
组合5	$coe_s, \Delta coe, \Delta t, m_s, \Delta V_L, \Delta m_L$
组合6	$ee_s, \Delta ee, \Delta t, m_s, \Delta V_L, \Delta m_L$
组合7	$ee_s, \Delta ee, \Delta t, m_s, \Delta E, \Delta h, \Delta V_L, \Delta m_L$

为了更为清楚地判断估计结果是否准确,采用估计燃料消耗与实际燃料消耗的均方差和均方根差作为估计精度的衡量标准。

### 3 算例

本文使用第7届国际轨道竞赛的小天体数据,共16 256个天体,轨道采用二体开普勒轨道,初始轨道根数的时刻为56 800MJD。探测器的初始质量为2 000 kg,小推力产生的最大推力为0.3 N,比冲为3 000 s。每组燃料最优小推力转移生成中,从16 256个天体中随机选取出发天体和到达天体,再随机确定出发时刻,转移时间和初始质量,根据第2节中的方法判断并生成小推力转移。使用该方法共生成6万组数据,其中1万组用来检验估计结果的小推力转移轨迹信息如表3所示。

下面对Lambert估计和6种特征组合方式的机器学习结果进行分析,结果如表4。

表3 小推力转移轨迹信息  
Table 3 Information of low-thrust transfers

参数	最大值	最小值	平均值
$\Delta a/\text{AU}$	0.618 0	$9 \times 10^{-6}$	0.104 0
$\Delta e$	0.207 7	$1.1 \times 10^{-5}$	0.034 6
$\Delta i/(\circ)$	4.311 5	$5.747 7 \times 10^{-5}$	0.943 3
$\Delta \Omega/(\circ)$	359.747 9	$2.816 4 \times 10^{-3}$	71.825 3
$\Delta \omega/(\circ)$	359.085 6	$3.448 6 \times 10^{-4}$	95.559 8
$\Delta f/(\circ)$	356.794 8	$9.368 7 \times 10^{-3}$	99.839 2
$\Delta t/\text{d}$	299.999 2	103.448 1	266.811 2
$m_s/\text{kg}$	1998.280 0	1 000.012 0	1268.194 4
$\Delta m/\text{kg}$	169.038 0	28.052 0	84.002 9

表4 估计结果比较  
Table 4 Estimation results

比较种类	均方差/kg	均方根差/kg	学习时间/s
Lambert 估计	13.55	15.16	
特征组合 1	10.46	12.93	38.30
特征组合 2	10.56	12.97	41.12
特征组合 3	10.42	12.80	41.64
特征组合 4	4.07	5.71	46.45
特征组合 5	3.69	5.30	52.45
特征组合 6	3.35	4.98	49.20
特征组合 7	3.34	4.97	49.74

综合来看,燃料最优小推力转移燃料消耗机器学习估计方法明显优于 Lambert 估计方法。机器学习估计方法中,带有 Lambert 估计的速度增量和燃料消耗作为学习特征的特征组合明显更优。组合 1、2、3 的特征是构建一段小推力转移所需要的最基本的参数,但是作为机器学习的特征,为了得到更准确的估计结果,这些基本参数还需要额外信息,比如 Lambert 估计的结果。

对于机器学习方法来说, Lambert 估计的结果提供了一个学习的方向,使得机器可以在 Lambert 估计结果的基础上,更加快速准确地逼近真实值;而对于

没有 Lambert 估计结果的特征组合,机器在学习过程中完全凭借转移所需的最基本参数,可能需要耗费更多的精力去学习,学习效果也相对较差。

对于不同的轨道描述方法,无 Lambert 估计特征的特征组合结果非常接近,有 Lambert 估计特征的特征组合中,春分点轨道根数的估计结果最优,经典轨道根数的估计结果次优。机器学习最重要的是特征参数的选择,特征的选择决定了机器学习到的是问题的表面还是本质。轨道根数的描述方法,相比于位置速度表示法,更能体现出轨道的本质属性,轨道根数表示法更能够直接表现出 2 个轨道的差异,所以通过轨道根数学习得到的结果要明显优于通过位置速度学习得到的结果。春分点轨道根数相比于经典轨道根数无奇异,更适合于小倾角近圆轨道,而本文使用的数据库中小天体多为小倾角近圆轨道,故结果最优。二体轨道中轨道积分应该是最能够反映轨道本质的参数,但是在本文中考虑轨道积分后的结果并无明显改观,仍然需要进一步进行探究。

特征组合 3 和特征组合 6 的误差分布图如图 1~2 所示,图 1 中横坐标为机器学习估计值与实际值的误差,纵坐标为个数,蓝色表示机器学习估计结果,橘红色表示 Lambert 估计结果。图 1 中特征组合 3 的机器学习结果误差虽然平均值接近 0,但是 Lambert 估计的误差分布更为集中,图 2 中特征组合 6 的机器学习结果具有更优的误差平均值和集中程度。

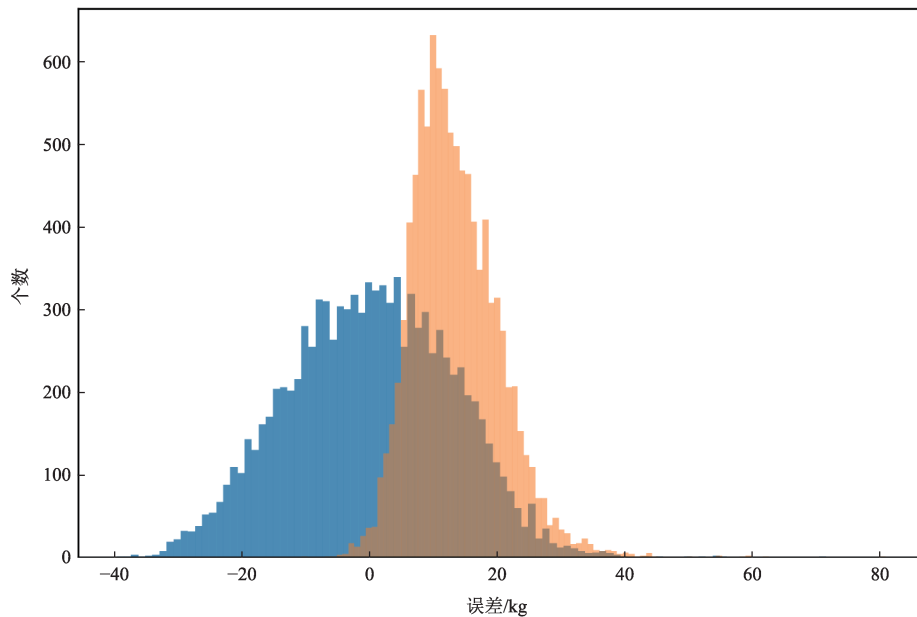


图1 特征组合 3 的误差分布  
Fig. 1 Error distribution of Features III

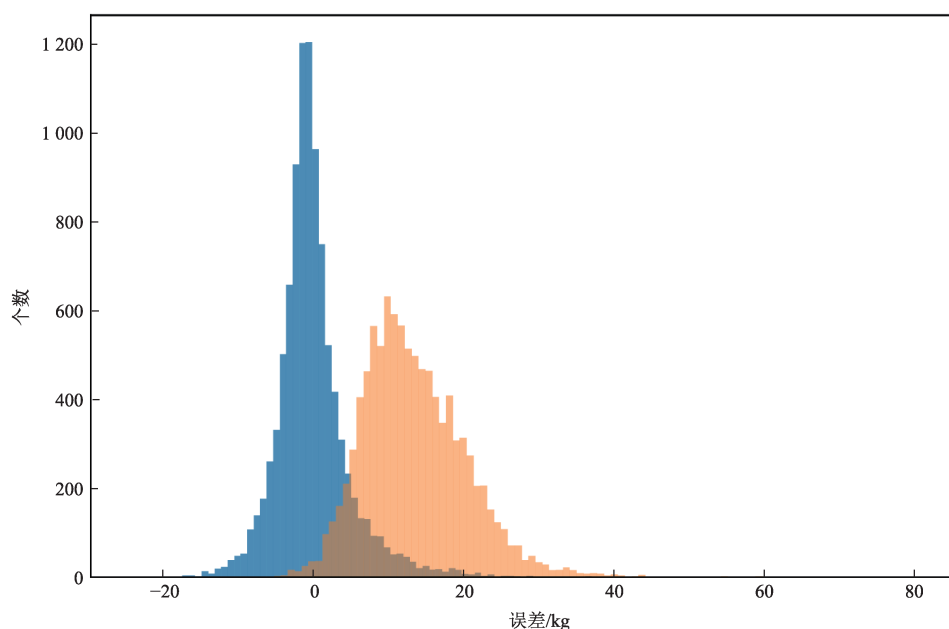


图2 特征组合6的误差分布  
Fig. 2 Error distribution of features VI

## 4 结 论

本文采用机器学习的方法对燃料最优小推力转移的燃料消耗进行估计,比目前最为常用的Lambert估计方法结果明显更优。不同的特征组合会影响机器学习的结果。相比于初末轨道、初始质量与转移时间的特征组合,增加了Lambert估计结果的特征组合估计结果更优。在位置速度、经典轨道根数、春分点轨道根数3种轨道描述方法中,春分点轨道根数描述方法作为特征的机器学习估计结果最为准确。故带有Lambert估计特征的春分点轨道根数的特征组合为较好的机器学习特征组合。

本文只考虑了不同特征对估计结果的影响,不同的机器学习算法与轨道描述方法之间的关联同样也会对估计结果产生影响,未来可以考虑研究使用更为准确的特征组合,以及不同的机器学习算法进行估计。

## 参 考 文 献

- [1] GATTO G, CASALINO L. Fast evaluation and optimization of low-thrust transfers to multiple targets[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2014, 38(8): 420-423.
- [2] LI H Y, CHEN S Y, BAOYIN H X. J2-perturbed multi-target rendezvous optimization with low thrust[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2018, 41(3): 802-808.
- [3] AMPATZIS C, IZZO D. Machine learning techniques for approximation of objective functions in trajectory optimisation[C]// Artificial Intelligence in Space (IJCAI-09 Workshop). Pasadena, California in US: Artificial Intelligence in Space (IJCAI-09 Workshop), 2009.
- [4] CASSIOLI A, DI LORENZO D, LOCATELLI M, et al. Machine learning for global optimization[J]. Computational Optimization & Applications, 2012, 51(1): 279-303.
- [5] HENNES D, IZZO D, LANDAU D. Fast approximators for optimal low-thrust hops between main belt asteroids[C]//Computational Intelligence(SSCI), 2016 IEEE Symposium Series on 2016. Athens, Greece: IEEE, 2016.
- [6] CASALINO L, COLASURDO G. Problem description for the 7th global trajectory optimisation competition. GTOC portal[EB/OL]. (2014)[2018-4-10]http://sophia.estec.esa.int/gtoc portal, 2014.
- [7] JIANG F H, BAOYIN H X, LI J F. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(1): 245-258.
- [8] PEDREGOSA F, VAROQUAUX G, GRAMFORT, A, et al. Scikit-learn: machine learning in Python[J]. Journal of Machine Learning Research, 2011(12): 2825-2830.

作者简介:

**李海洋**(1994-),男,博士研究生,主要研究方向:航天动力学与控制。

通信地址:北京市海淀区清华大学蒙民伟科技大楼(100084)

电话:(010)62773402

E-mail:lihy15@mails.tsinghua.edu.cn



## Machine Learning Method of Estimation for Fuel Consumption of Low-Thrust Transfers

LI Haiyang, BAOYIN Hexi

(School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** It is often necessary to solve complex global optimization problems in the preliminary deep space mission design. The exact solution to the design and optimization of low-thrust trajectory is more difficult and time-consuming, because of the limitation of calculation ability and time, it's impossible to solve each low-thrust problem accurately using numerical methods in the global optimization process. In this paper, we propose a machine learning method to estimate the fuel consumption for fuel-optimal low-thrust transfer. The results show the performance is better compared with the Lambert method which is commonly used at present. Different features are used for machine learning, and the major differences are different orbit description and whether Lambert estimation result is considered. The feature with equinoctial orbit elements and Lambert estimation is the best feature. It can provide reference for future orbit design of deep space exploration mission.

**Key words:** low-thrust; fuel optimal; fast estimation; machine learning

**High lights:**

- A machine learning method is proposed to estimate the fuel consumption of low-thrust transfer.
- The effect of different features for machine learning is analyzed.
- The feature with equinoctial orbit elements and Lambert estimation is the best feature.

[责任编辑: 高莎, 英文审校: 任树芳]