

深远空连续推进动力与施图林格解的解析

栾恩杰

(国家国防科技工业局, 北京 100048)

摘要: 针对太阳系远深距离的探测将是人类下一阶段深空探测活动的主要目标。这一目标的实现依赖于探测器连续推进动力技术的突破。从描述连续常值推力下太空飞行的施图林格解出发, 对其中反映的深远空飞行任务有效载荷比、任务时间、飞行距离等关键参数与发动机性能之间的关系进行了深入分析。给出了在特定任务时长、特定飞行距离要求下发动机比冲、功率需要满足的条件及其对有效载荷比、最终飞行速度等指标的影响。此外, 基于二体轨道动力学对太阳系行星探测的大椭圆转移轨道和转移能量进行了推导, 并对连续推力的太阳帆任务方案涉及的关键技术指标做了理论性的计算。这些结论是对深空探测连续推力方案基础理论的归纳, 可以为我国未来开展深远空探测活动提供重要的启发和指导。

关键词: 深远空; 连续推力; 施图林格解

中图分类号: V43

文献标识码: A

文章编号: 2095-7777(2018)04-0301-22

DOI:10.15982/j.issn.2095-7777.2018.04.001

引用格式: 栾恩杰. 深远空连续推进动力与施图林格解的解析[J]. 深空探测学报, 2018, 5(4): 301-322.

Reference format: . Continuous propulsion dynamics in very far space exploration and analysis of the stuhlinger's solution[J]. Journal of Deep Space Exploration, 2018, 5(4): 301-322.

我在有关的文章中曾经提过将深空探测的动力系统作为一个独立分支进行研究的意见。此文在讨论有关的问题时, 将采用国际宇航科学院(International Academy of Astronautics, IAA)的“星际科学先导任务项目(Interstellar Precursor Mission, IPM)”^[1]的有关内容。因为我觉得“IPM”所涉及的概念相当丰富, 对我们的深空探测活动具有很重要的启示。

1 深远空探测任务的推进动力应作为空间动力的一个独立的门类

在确定“深远空”(Very Far, VF, 或者称其为远深空)天界时, 最近有一些报道将太阳风层顶(100 AU)以外的空间环境作为星际太空的起端(Heliopause)。并以此表述为飞出太阳系的边缘。我认为在确立太阳系的边缘处时, 可以延续在太阳系中太阳—地球、地球—月球间及行星间影响球的概念, 比如在地球表面的物体受到地球的引力比太阳对其的引力要大1 600多倍, 实际上在距离10倍地球半径时, 其引力只有地球表面的1%。也即处于影响球之内时, 只考虑一个主天体的作用, 不会影响我们的分析和判断。按这个意见, 我们太阳系与比邻星系则是两个相距约 2.7×10^5 AU的主天体, 在研究我们太阳系的行星

运动时, 并不必要加入比邻星的作用, 从这个意义上说是否可以按影响球概念定义太阳系的天界。简单而言之, 如果比邻星的质量与太阳系相同, ($\frac{r_{sop}}{R} = \left(\frac{m_p}{m_s}\right)^{\frac{2}{5}}$), 其影响球处于 2.7×10^5 AU, 其一半的距离也在10万AU, 所以有学者认为太阳系的边缘在10万AU以上, 即使有50 km/s的飞船, 飞到这个距离也要1 200多年(1.35×10^5 AU/50 km/s), 如果我们以这个目标作为现在的人类要实现的目标的话, 由于其距离太过遥远, 所需行进时间太过漫长, 将使我们望而却步, 起不到任何激励作用, 在太阳系远深距离(very far space destination)的定义中将科学目标和技术目标综合考虑, 将技术型任务和科学型任务结合起来判断。IAA的IPM将太阳系的边界设定在80~100 AU处, 也是有一定道理的。在未来先进的深空动力系统得以实现突破, 使飞行器飞行速度达到100 km/s以上时, 实现500 AU距离的任务也是具有实践推动性和未来挑战性的。

在深远空的行动中, 人类将面临诸多从未遇到过的, 或者说很少思索的问题。

首当其冲是深远空推进动力问题, 它和超远的飞行距离紧密相关。化学推进剂的极限能量是 mc^2 , 所以单位质量的极限能量为 $(3 \times 10^5 \times 10^3 \text{ m/s})^2 = 9 \times 10^{16} \text{ J/kg}$,

目前可能达到的单位质量提供的能量在 $(0.8 \sim 1.25) \times 10^7$ J/kg水平, 它的喷射速度 v_e 在 $4 \sim 5$ km/s左右。这对超远距离飞行任务所需的时间而言, 将是难以承受的, 若在三级 $M_p/M_0 = 0.9$ 的条件下, 其终速 $u_\tau = 3 \times 5 \times \ln(1/0.1)$, 即 34.5 km/s, 以这个速度漫游到太阳风层顶(100 AU)处也需13.8年, 若要到太阳引力透镜焦点(500 AU)则需70年。到达奥尔特云 10^4 AU处则要1 380年。如果想在20年内达到500 AU, 那航天器飞行速度要达到120 km/s。

若在近地轨道处逃离地球引力, 其速度增量是第二宇宙速度与第一宇宙速度之差($V_{II} - V_I$), 即 $12 \sim 8$ km/s, $\Delta V = 4$ km/s。它是化学推进剂的喷射速度能够达到的。

怎样才能既加快飞行速度, 且能消耗更少的质量呢? 显然不能利用火箭的短时间加速(有的书称为脉冲加速)、以霍曼轨道方式奔向目标, 所以IAA的IPM所重点关注的是采用稳定、长时间工作的高比冲推力系统, 使其达到足够大的速度增量, 以便使任务在可以接受的时间内完成。这种稳定、长时间工作的高比冲推力系统, 即是我们重视开发的深空远程的推力系统。

从目前掌握的技术来看, 有两种推进系统得到了广泛重点关注。一个是通过太阳辐射直接驱动的太阳帆推进, 这是一种利用航天器所处位置的太空资源, 称为原位资源(Insitu Resource)。这类资源中的主恒星辐射因其与距离的平方呈衰减而变小, 但在更远的将来能否实现星际冲压喷气发动机(Interstellar Ramjet), 以就地获取星际质子(H^+), 目前仍是一种科幻。另一个是电推进(Electric Thrusters, ET), 以采集主恒星光能的光伏电池或航天器自带的核电反应堆(Nuclear Electric Propulsion, NEP)作为推力的动力, 电推进的比冲比化学推进要高得多, 目前我们已经做到高于液体火箭发动机(LRE)的10倍以上, 其喷射速度(v_e)达到40 km/s。

在IAA的“IPM”一书中第4章提到用电力实现太空旅行的概念可能是由施图林格在二战期间提出来的(Possibly the first suggestion to apply electric power to space travel was by Stuhlinger during WW II.)。在书中的参考文献中, 只引用了一篇施图林格(Stuhlinger)的文章, 是1964年的《太空飞行的离子推进》^[2]他所以提出电推力主要原因是这种推力系统可以获得比化学能高得多的比冲, 他认为核电可以为其提供动力源。

如果说爱因斯坦的质—能关系表示小质量转化成巨能量, 那么利用电推进就是以高喷射速度得到小质量下的大比冲。

2 施图林格解的解析

施图林格给出了一个连续常值推力的方法, 也即飞行器所受到的推力不是常规化学推进剂的短时间加速过程, 关机后它将按圆锥曲线轨道运行。用我们习惯的说法, 深远空常值推进系统是长时间处于主动段飞行的飞行器。正是在这个设定下, 施图林格开发了加速度(速度增量)为常值条件下的方法。有关加速度为常值情况的全面分析, 还有待进一步研究, 所以它只是一个原始的方法。

IAA的IPM给出了这个解的结论。我这里的主要内容是将书中没有表征的过程和推演过程中涉及的一些概念和方法做一个解析, 解析过程中是否存在不准确之处, 还请有关学者指正。

2.1 施图林格方法的原始出发点是齐奥尔科夫斯基定律。

$$u_\tau = v \cdot \ln \frac{M_0}{M_0 - M_p} \quad (1)$$

式中的符号采用IPM文章的写法: u_τ 为时间 τ 时的航天器速度, v 为航天器推进系统的排气速度, M_0 为航天器总质量, 也即

$$-u_\tau/v = \ln \frac{M_0 - M_p}{M_0}$$

$$e^{-u_\tau/v} = \frac{M_0 - M_p}{M_0}$$

若令 $M_0 = M_p + M_w + M_L$, 其中 M_p 为推进剂质量, M_w 为推进系统的干重(不计推进剂系统质量), M_L 为有效载荷质量(是任务需要的有效部分),

$$M_p = M_0 - (M_w + M_L),$$

代入式(1)则

$$e^{-u_\tau/v} = \frac{M_0 - M_0 + (M_w + M_L)}{M_0} = \frac{M_w + M_L}{M_0}$$

施图林格解表征的是任务的“有效载荷”比 M_L/M_0 , 所以我们要将 M_w 表征为与 M_0 有关的方式。为此定义了推力系统的“功率密度”概念。 α 为功率密度。

$$\alpha \equiv (\text{功率 } P)/M_w,$$

理想状态下, 推进系统的喷出速度 v 等于其比冲(I_{sp}), 比冲单位为“推力/单位时间消耗推进剂的质量”, m/s。

在 α 的定义中, 功率 P 应是推进系统在恒定加速度下所贡献的能量。如果我们在 τ 时间内稳定地以 v 速喷出 M_p 的推进剂, 则其功率 P 为

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_p}{\tau} \cdot v^2 \quad (2)$$

所以, α 的定义表达式为

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_p}{\tau M_w} \cdot v^2, \quad M_w = \frac{M_e \cdot v^2}{2\alpha\tau} \quad (3)$$

将式(3)代入 $M_p = M_0 - (M_w + M_L)$ 式中

$$\begin{aligned} M_p &= M_0 - \frac{M_p \cdot v^2}{2\alpha\tau} - M_L \\ M_p \left[1 + \frac{v^2}{2\alpha\tau} \right] &= M_0 - M_L \\ M_p &= \frac{1}{1 + v^2/2\alpha\tau} (M_0 - M_L) \end{aligned} \quad (4)$$

将其代入式(1), 有

$$\begin{aligned} e^{-u_\tau/v} &= \frac{M_0 - M_p}{M_0} = 1 - \frac{M_p}{M_0} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + v^2/2\alpha\tau} \left(\frac{M_0 - M_L}{M_0} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{1 + v^2/2\alpha\tau} \left(1 - \frac{M_L}{M_0} \right) \end{aligned}$$

$$\text{有} \quad 1 - \frac{M_L}{M_0} = \left(1 + \frac{v^2}{2\alpha\tau} \right) (1 - e^{-u_\tau/v})$$

$$\frac{M_L}{M_0} = e^{-u_\tau/v} - \frac{v^2}{2\alpha\tau} (1 - e^{-u_\tau/v}) \quad (5)$$

此式即称为施图林格解 (Stuhlinger's Solution)。

下面讨论一下这个解:

1) 施图林格解给出的是有效载荷比 M_L/M_0 与最终速度 u_τ 、喷出速度 v 及推进剂工作时间 τ 和推进系统功率密度 α 这四个参数的关系。

2) 它的分析基础是齐奥尔科夫斯基定律, 从此定律出发, 可以推演出我们工程所需的各参数之间的关系与规律。这个解的核心思路是独立出一个“功率密度 α ”的参数。

3) 在下面的解析里, 将根据不同的需要形成 M_L/M_0 , u_τ , τ , 及功率 P 之间的关系表达式。

2.2 距离增量 S_τ 的精确表达式

在IPM任务中, 有关内容反映在4.4节, 题目是通用“精确”解 (General ‘Exact’ Solution)。这里将从前面导出的施图林格解出发, 由速度增量 Δu_τ , 导出距离增量 S_τ 。

仍然假定推进剂喷射速度 v 是平稳的常值 (也即比冲不变), 且推进剂的秒耗量也是平稳的。那么推进剂在 t 时刻的消耗量为 $\frac{M_p}{\tau} t$

将它代入式(1), 有

$$\begin{aligned} u_t &= v \cdot \ln \left[\frac{M_0}{M_L + M_w + \left(M_p - \frac{M_p}{\tau} t \right)} \right] \\ &= -v \cdot \ln \left[\frac{M_L + M_w + M_p - \frac{M_p}{\tau} t}{M_0} \right] \\ &= -v \ln \left[1 - \frac{M_p}{M_0} \cdot \frac{t}{\tau} \right] \end{aligned}$$

$$dS_t = u_t \cdot dt$$

即

$$\begin{aligned} S_\tau &= \int_0^\tau u_t \cdot dt \\ &= -v \cdot \int_0^\tau \ln \left(1 - \frac{M_p}{M_0} \cdot \frac{t}{\tau} \right) dt \\ &= v \cdot \tau \cdot \frac{M_0}{M_p} \cdot \int_0^\tau \ln \left(1 - \frac{M_p}{M_0} \cdot \frac{t}{\tau} \right) d \left(1 - \frac{M_p}{M_0} \cdot \frac{t}{\tau} \right) \\ &= v \cdot \tau \cdot \left[\frac{M_0}{M_p} \left(1 - \frac{M_p}{M_0} \cdot \frac{t}{\tau} \right) \cdot \ln \left(1 - \frac{M_p}{M_0} \cdot \frac{t}{\tau} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_0}{M_p} \left(1 - \frac{M_p}{M_0} \cdot \frac{t}{\tau} \right) \right]_0^\tau \\ S_\tau &= v\tau \left[\left(\frac{M_0}{M_p} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{M_p}{M_0} \right) + 1 \right] \end{aligned} \quad (6)$$

此处的目的是求解 S_τ 和 M_L/M_0 的关系, 则应将 S_τ 的表达式中 M_p/M_0 转化成 M_L/M_0 。为此仍需用到施图林格解的参数定义。将式(4)代入式(6)有

$$\frac{M_p}{M_0} = \frac{1}{1 + v^2/2\alpha\tau} (1 - M_L/M_0)$$

$$\begin{aligned} S_\tau &= v\tau \left[\left(\frac{1 + \frac{v^2}{2\alpha\tau}}{1 - \frac{M_L}{M_0}} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{v^2}{2\alpha\tau}} \left(1 - \frac{M_L}{M_0} \right) \right) + 1 \right] \\ &= v\tau \left[\frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}{1 - \frac{M_L}{M_0}} \ln \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}{1 + \frac{v^2}{2\alpha\tau}} + 1 \right] \\ &= v\tau \left[1 - \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}{1 - \frac{M_L}{M_0}} \ln \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + 1}{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}} \right] \end{aligned}$$

有

$$f\left(\frac{M_L}{M_0}\right) = S_\tau - v\tau \left[1 - \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}{1 - \frac{M_L}{M_0}} \ln \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + 1}{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}} \right] = 0 \quad (7)$$

式(7)即为其 S_τ 与 $\frac{M_L}{M_0}$ 关系的精确解。

2.2.1 小结

1) 在 $f\left(\frac{M_L}{M_0}\right)$ 的求解中, 将 α 作为参数, 且认为是已知的, 它是推进系统的功率密度。这里的密度是指其功率与推进系统的干重 M_w 之比, 这是一个发动机本身具有的技术特性(从 $M_0 = M_p + M_w + M_L$ 的定义, 已知 M_w 是除了有效载荷 M_L 及推进剂 M_p 之外的质量, 也即不只是单元发动机的质量而是航天器的总干重)。由 $\alpha \equiv \frac{P}{M_w}$ 可知其量纲是(w/kg), 也即(m³/s³), 而 τ 为任务的工作时间, 所以表达式中的 $2\alpha\tau$ 的量纲为(m/s)², 所以 $\sqrt{2\alpha\tau}$ 具有速度量纲, $\sqrt{2\alpha\tau}$ 即是所谓的特征速度(Characteristic Velocity, V_c)。

2) 功率密度 α 值随不同的推进系统而有很大的变化, 施图林格主要是针对核电推进作为背景, 对核电推进而言, 它可能达到(MW/kg)级, 如果在一年的任务中 $2\alpha\tau$ 可以达到10¹³量级, 即

$$\begin{aligned} & 2 \times 1 \text{ MW/kg} \times (365 \times 24 \times 3600 \text{ s}) \\ &= 2 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}^3 \times 0.315 \times 10^8 \text{ s} = 0.63 \times 10^{14} (\text{m/s})^2 \\ & v_c \text{ 达到 } 10^7 \text{ m/s 量级。} \end{aligned}$$

在这样的 v_c 下, 除非 v (比冲 I_{sp})与其相近, 否则式(5)的第二项是可以忽略的, 也即式(5)变成

$$\frac{M_L}{M_0} = e^{-u_\tau/v} \quad (8)$$

式(8)即为所有化学推进系统的情况, 也即式(8)是式(5)的收敛值。

实际上, 在 α 值的定义中, 只是推进系统本身的结构质量 M_w 比值, 如果将所有非有效载荷部分的质量一并考虑在 M_w 里时 α 值还是较小的。据IPM任务描述, 核电推进系统 α 值的保守估计约为0.01~0.02 kw/kg(即为10~20 m²/s³)。美国国家航空航天局(NASA)使用太阳能电池板驱动的太阳能技术的验证试用发动机(NSTAR)的 $\alpha = 0.17 \sim 0.25 \text{ m}^2/\text{s}^3$ 。

3) 对式(5)进行归一化处理, 并将 u_τ 和 $v_c = \sqrt{2\alpha\tau}$ 作为参数。表达 M_L/M_0 与比冲的关系:

$$\frac{M_L}{M_0} = e^{-u_\tau^*/v^*} - (v^*)^2(1 - e^{u_\tau^*/v^*})$$

(其中 $u_\tau^* = \frac{u_\tau}{v_c}$, $v^* = \frac{v}{v_c}$)

2.3 施图林格解的应用

在IPM任务中, 将有效载荷比 M_L/M_0 、最终速度 u_τ 、比冲 $v(I_{sp})$ 、推进系统任务时间 τ 、发动机特征速度 v_c 、功率 P 及功率密度 α 、深远空目标距离 S_τ 作为

研究分析的关键参数, 并分析其相应的规律, 我认为弄清楚这些概念是非常重要的。在这个领域, 美、苏(俄)自1950年代以来, 积累了大量的研究成果。而弄清楚这些参数之间的关系, 则是这些知识的重要部分。

在上述七个参数之中, 特征速度 v_c 与 α 和 τ 相关, 而 α 又与 P 相关。所以在 $f(M_L/M_0) = 0$ 的“精确”解里, 只含有 S_τ , v , τ , α 及 M_L/M_0 这5个物理量。为描述其中2个量之间的关系, 必须将其它的3个变量作为参数(Parameter), 在这3个参数取值的条件下, 得到所需研究的其它两个变量之关系。

在IPM任务中, 将 $S_\tau = 73 \text{ AU}$ 及 520 AU ; $\alpha = 0.1$ 及 0.4 ; $\tau = 5 \sim 28$ 年; 作为参数, 求出 M_L/M_0 与 $v(I_{sp})$ 之间的变化规律。

$f(M_L/M_0) = 0$ 是非线性的方程, 可通过迭代方式求解, 我将这一过程中的概念说明如下:

首先, 将 $(S_\tau - v\tau)$ 从方程中移出, 然后用 $v\tau$ 除两边得到

$$\frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}{1 - \frac{M_L}{M_0}} \ln \left[\frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + 1}{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}} \right] = \frac{v\tau - S_\tau}{v\tau} = 1 - \frac{S_\tau}{v\tau} \quad (9)$$

式中 $\frac{S_\tau}{v\tau}$ 是任务距离与推进系统在任务时间 τ 内, 推进剂喷出的“名义总距离”之比, 我们将 $\left(1 - \frac{S_\tau}{v\tau}\right)$ 单列出来作为一个独立子项分析是有意义的。等式左边

$$\frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}{1 - \frac{M_L}{M_0}} > 0, \text{ 且 } \ln \left[\frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + 1}{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}} \right] > 0$$

$$\text{所以 } (1 - \frac{S_\tau}{v\tau}) > 0;$$

$$\text{也即 } \frac{S_\tau}{v\tau} < 1$$

$$\therefore v\tau > S_\tau \quad (10)$$

这是任务距离、任务时间及发动机比冲的边际条件, 如果出现 $v\tau \leq S_\tau$, 则表明发动机以 v 的比冲在任务要求的时间 τ 内到达不了 S_τ 的距离, 也即其载荷比已经

不可能存在。从表达式中也可看出, $\frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}{1 - \frac{M_L}{M_0}}$ 是不会小于零的, 只有对数项内为1时, 也即 $\frac{M_L}{M_0} \rightarrow 1$ 时才有 $1 - \frac{S_\tau}{v\tau} = 0$ 的情况。据此, 我们可以称 $(1 - \frac{S_\tau}{v\tau})$ 为任务能力被截止的极点(定义为截比 J)。而

$$\frac{v^2}{2\alpha\tau} = \left(\frac{v}{v_c}\right)^2 \text{ 定义为特征值 } L。$$

例如: 求在 $S_\tau = 73 \text{ AU}$, $\tau = 8$ 年的任务要求时,
设 $\alpha = 0.1 \text{ kw/kg}$, 比冲 $v = 100 \text{ km/s}$ 的载荷比 M_L/M_0 。

首先计算截比值

$$\begin{aligned} J &= 1 - \frac{S_\tau}{v\tau} \\ &= 1 - \frac{73 \text{ AU}}{100 \text{ m/s} \times 8 \times 0.315 \times 10^8 \text{ s} / 1.5 \times 10^8 \text{ km}} \\ &= 1 - \frac{73 \text{ AU}}{168 \text{ AU}} = 0.565 \end{aligned}$$

有了截比 $J = 0.565$, 则可以迭代求解

$$\frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}{1 - \frac{M_L}{M_0}} \ln \left[\frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + 1}{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}} \right] = 0.565$$

$$\text{其中 } \frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{(100 \text{ km/s})^2}{2 \times 0.1 \text{ kw/kg} \times 8 \times 0.315 \times 10^8 \text{ s}},$$

式中

$$\begin{aligned} 1 \text{ kw/kg} &= 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m/s} \cdot \text{kg} \\ &= 10^3 \text{ m}^2/\text{s}^3 = 10^3 \times 10^{-6} \text{ km}^2/\text{s}^3 = 10^{-3} \text{ km}^2/\text{s}^3 \end{aligned}$$

则

$$\frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{10^4 \text{ km}^2/\text{s}^2}{2 \times 0.1 \times 10^{-3} \text{ km}^2/\text{s}^3 \times 2.523 \times 10^8 \text{ s}} = 0.198 \text{ 1},$$

代入上式

$$\frac{0.198 \text{ 1} + \frac{M_L}{M_0}}{1 - \frac{M_L}{M_0}} \ln \left[\frac{0.198 \text{ 1} + 1}{0.198 \text{ 1} + \frac{M_L}{M_0}} \right] = 0.565$$

经迭代有 $M_L/M_0 = 0.22$ 时左式值为 0.564, 误差值在 0.001 位上可以接受这个结果。

1) 当比冲为 150 km/s 时

$$\text{其截比为 } 1 - \frac{73}{150 \times 8 \times 0.315 / 1.5} = 0.710,$$

此时特征值

$$L = \frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{(150)^2}{2 \times 10^{-4} \times 8 \times 0.315 \times 10^8} = 0.446,$$

迭代后得 $M_L/M_0 = 0.31$,

$$\text{验证 } \frac{L+0.31}{1-0.31} \ln \frac{L+1}{L+0.31} = 0.710,$$

说明从 $v = 100 \text{ km/s}$ 提高到 $v = 150 \text{ km/s}$ 时, M_L/M_0 是上升的。

2) 再取一点 $v = 250 \text{ km/s}$ 时

$$\text{其截比 } J = 1 - \frac{73}{250 \times 8 \times 0.315 / 1.5} = 0.826,$$

特征值

$$L = \frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{(250)^2}{2 \times 10^{-4} \times 8 \times 0.315 \times 10^8} = 1.24,$$

迭代后得 $M_L/M_0 = 0.31$,

$$\text{验证 } \frac{L+0.31}{1-0.31} \ln \frac{L+1}{L+0.31} = 0.827,$$

说明从 $v = 150 \text{ km/s}$ 到 $v = 250 \text{ km/s}$, M_L/M_0 没有提升。在此段比冲的影响不大。

3) 再取 $v = 300 \text{ km/s}$ 时

$$\text{其截比 } J = 1 - \frac{73}{300 \times 8 \times 0.315 / 1.5} = 0.855,$$

特征值

$$L = \frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{(300)^2}{2 \times 10^{-4} \times 8 \times 0.315 \times 10^8} = 1.786,$$

经迭代得 $M_L/M_0 = 0.27$,

$$\text{验证 } \frac{L+0.27}{1-0.27} \ln \frac{L+1}{L+0.27} = 0.855,$$

说明从 $v = 250 \text{ km/s}$ 到 $v = 300 \text{ km/s}$, M_L/M_0 是下降的。

它表明在 $v = 150 \text{ km/s}$ 到 $v = 250 \text{ km/s}$ 之间有一个 M_L/M_0 的极值点。

4) 如果我们取 $v = 200 \text{ km/s}$ 时

$$\text{它的截比 } J = 1 - \frac{73}{200 \times 8 \times 0.315 / 1.5} = 0.783,$$

特征值

$$L = \frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{(200)^2}{2 \times 10^{-4} \times 8 \times 0.315 \times 10^8} = 0.793,$$

迭代得 $M_L/M_0 = 0.33$,

$$\text{验算 } \frac{L+0.33}{1-0.33} \ln \frac{L+1}{L+0.33} = 0.784.$$

可以从这个例子中看到在 8 年左右的旅行时间情况下, 确实存在一个比冲值, 使 M_L/M_0 达到最大。

随着 τ 的增加和 α 的增大, 都使特征值 $L = \frac{v^2}{2\alpha\tau}$ 减小, M_L/M_0 与 $v(Isp)$ 的关系曲线变得更平坦。这可以从 $\tau > 16$ 年的曲线清楚地看出。

动力飞行时间 τ 和比冲 v 是特征值的关键参数, 在 τ 比较小 (比如几年) 时, α 值比较重要, 也即发动机的功率密度影响比较大。如果 τ 比较大 (比如 20 年), 则 α 值的重要性就低得多。我们可以通过两个例子说明这个结果。

若令 $\tau = 8$ 年、 $S_\tau = 73$ AU、 $v = 500$ km/s, $\alpha_1 = 0.1$ 和 $\alpha_2 = 0.2$ 两个值时的 M_L/M_0 来比较。

此时的特征值

$$L_1 = \frac{v^2}{2\alpha_1\tau} = \frac{(500)^2}{2 \times 0.1 \times 10^{-3} \times 8 \times 0.315 \times 10^8} = 4.960$$

$$L_2 = \frac{v^2}{2\alpha_2\tau} = \frac{L_1}{2} = 2.480$$

$$\text{截比 } J_{1,2} = 1 - \frac{S_\tau}{v \cdot \tau} = 0.913,$$

当 $\alpha = 0.1$ 时, 经迭代有 $M_{L1}/M_0 = 0.035$

验算

$$\begin{aligned} & \frac{L_1 + M_{L1}/M_0}{1 - M_{L1}/M_0} \ln \frac{L_1 + 1}{L_1 + M_{L1}/M_0} \\ &= \frac{4.96 + 0.035}{1 - 0.035} \ln \frac{4.96 + 1}{4.96 + 0.035} \\ &= 5.176 \ln 1.193 = 0.913 \end{aligned}$$

当 $\alpha = 0.2$ 时, 经迭代有 $M_{L2}/M_0 = 0.43$

验算

$$\begin{aligned} & \frac{L_2 + M_{L2}/M_0}{1 - M_{L2}/M_0} \ln \frac{L_2 + 1}{L_2 + M_{L2}/M_0} \\ &= \frac{2.48 + 0.43}{1 - 0.43} \ln \frac{2.48 + 1}{2.48 + 0.43} \\ &= 5.105 \ln 1.196 = 0.913 \end{aligned}$$

可以看出在 $\tau = 8$ 年, 时间比较短的条件下, α 从0.1变化到0.2时, M_L/M_0 从0.035变化到0.43达到12倍。影响是很大的, α 对载荷比的作用很大。

若令 $\tau = 20$ 年、 S_τ 仍为73 AU、 $v = 500$ km/s, $\alpha_1 = 0.1$ 和 $\alpha_2 = 0.2$ 时的两个值时的 M_L/M_0 来比较, 此时的特征值为

$$L_1 = \frac{v^2}{2\alpha_1\tau} = \frac{(500)^2}{2 \times 0.1 \times 10^{-3} \times 20 \times 0.315 \times 10^8} = 1.984$$

$$L_2 = \frac{v^2}{2\alpha_2\tau} = \frac{L_1}{2} = 0.992$$

$$\text{截比 } J_{1,2} = 1 - \frac{S_\tau}{v \cdot \tau} = 0.965,$$

当 $\alpha = 0.1$ 时, 经迭代有 $M_{L1}/M_0 = 0.8$

验算

$$\begin{aligned} & \frac{L_1 + 0.8}{1 - 0.8} \ln \frac{L_1 + 1}{L_1 + 0.8} \\ &= \frac{1.984 + 0.8}{1 - 0.8} \ln \frac{1.984 + 1}{1.984 + 0.8} \\ &= 13.92 \ln 1.0718 = 0.965 \end{aligned}$$

当 $\alpha = 0.2$ 时, 经迭代有 $M_{L2}/M_0 = 0.865$

验算

$$\begin{aligned} & \frac{L_2 + 0.865}{1 - 0.865} \ln \frac{L_2 + 1}{L_2 + 0.865} \\ &= \frac{0.992 + 0.865}{1 - 0.865} \ln \frac{0.992 + 1}{0.992 + 0.865} \\ &= 13.755 \ln 1.0727 = 0.965 \end{aligned}$$

看出在 $\tau = 20$ 年时, α 从0.1变化到0.2时, M_L/M_0 从0.8变化到0.865, 只变化约8%左右。

所以 α 的作用在任务时间长的时候, 其重要性降低。

2.4 关于任务时间

对于深远距离的任务, 只有采用新型的推进系统, 否则难以在可以接受的时间内完成任务。这个可接受的时间“IPM任务”中称为“人的平均工作年限”(Mean Human Job Time, MHJT)。这个可接受是指一个人, 而不是一个团队, 从确定任务到完成任务(接收到第一批数据)的时间超出了领导这个项目主要专家的工作年龄, 认为是不可接受的, 一般可以按20~30年以内为好。

下面分析任务时间与 α 值和 v 的关系对深远空任务的影响, 我们以 S_τ 为73 AU到730 AU作为例子来研究。

在有载人的深远空任务中, 必须要有较大的载荷比, 为此目的, 必须有比冲更高的推进系统。

以 $S_\tau = 73$ AU、 $v = 50$ km/s为例, 分析任务时间 τ 与功率密度 α 的关系。

这时截比

$$J = 1 - \frac{73 \text{ AU}}{50 \times \tau \times 0.315 \times 10^8 / (1.5 \times 10^8)} = 1 - \frac{6.952}{\tau}$$

$$\text{特征值: } L = \frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{(50)^2}{2 \times \alpha \times \tau \times 0.315 \times 10^8}$$

当 α 单位为kw/kg时, 须变换成 $(\times 10^{-3} \text{ km}^2/\text{s}^3)$,

$$L = \frac{(50)^2}{2 \times \alpha \times 10^{-3} \times \tau \times 0.315 \times 10^8} = \frac{0.03968}{\alpha\tau}$$

此时施图林格解表达式为

$$1 - \frac{6.952}{\tau} = \frac{\frac{0.03968}{\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}{1 - \frac{M_L}{M_0}} \ln \frac{\frac{0.03968}{\alpha\tau} + 1}{\frac{0.03968}{\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}$$

令上式的 M_L/M_0 为任务需求, 作为参数确定并取0.1值来分析。

将 $M_L/M_0 = 0.1$ 代入上式

$$1 - \frac{6.952}{\tau} = \frac{\frac{0.03968}{\alpha\tau} + 0.1}{1 - 0.1} \ln \frac{\frac{0.03968}{\alpha\tau} + 1}{\frac{0.03968}{\alpha\tau} + 0.1}$$

式中只含 α 和 τ 两个量, 以 α 为变量(量纲为kw/kg)迭代求解

当 $\alpha = 0.1$ 时

$$1 - \frac{6.952}{\tau} = \frac{\frac{0.3968}{\tau} + 0.1}{1 - 0.1} \ln \frac{\frac{0.3968}{\tau} + 1}{\frac{0.3968}{\tau} + 0.1}$$

可求出 $\tau = 10.1$ 年

$$\text{验算: } J = 1 - \frac{6.952}{10.1} = 0.3117$$

$$L = \frac{0.3968}{10.1} = 0.039287$$

$$\text{即 } \frac{L+0.1}{1-0.1} \ln \frac{L+1}{L+0.1} = \frac{0.039287+0.1}{1-0.1} \ln \frac{0.039287+1}{0.039287+0.1} = 0.1548 \ln 7.462 = 0.3111$$

在 $v = 50$ km/s时, 因其比冲比较小, 所以特征值 L 也比较小, 为

$$L = \frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{(50)^2}{2 \times \alpha \times 10^{-3} \times \tau \times 0.315 \times 10^8} = \frac{0.03968}{\alpha\tau}$$

$$\text{从 } \alpha = 1 \sim \alpha = 10^4, \text{ 其 } L \text{ 从 } \frac{0.03968}{\tau} \sim \frac{0.03968 \times 10^{-4}}{\tau}.$$

而 τ 往往是10年左右, 则 L 值在 $4 \times 10^{-3} \sim 4 \times 10^{-7}$, 所以, 在 $\alpha > 1$ 时 L 趋于极小量时特征表达式取饱和值 E

$$E = \frac{L+0.1}{1-0.1} \ln \frac{L+1}{L+0.1} = \frac{0.1}{0.9} \ln \frac{1}{0.1} = 0.2558$$

即当 $M_L/M_0 = 0.1$ 时, 其 E 的饱和值为0.2558。

由 $J = E$, 知 $(1 - \frac{S_\tau}{v \cdot \tau})$ 亦近似为常值,

$$\text{即 } 1 - \frac{S_\tau}{v \cdot \tau} = E,$$

$$\text{有 } 1 - E = \frac{S_\tau}{v\tau},$$

$$\text{则 } \tau = \frac{S_\tau}{v \cdot (1 - E)}$$

τ 的单位是“s”, v 的单位为“km”, 则 τ (年)

$$\tau = \frac{S_\tau \times 1.5 \times 10^8}{v(1-E) \times 0.315 \times 10^8} = \frac{S_\tau}{v(1-E) \times 0.21}$$

写成通式为: $\tau = \frac{S_\tau(\text{AU})}{v(1-E) \times 0.21(\text{AU})}$, 单位为“年”。

$M_L/M_0 = 0.1$, $v = 50$ km/s, α 从 $1 \sim 10^4$ 的范围内 S_τ 与 τ 的对应关系, 是将 $E = 0.2558$ 代入, $\tau = \frac{S_\tau}{7.81}$ (年), 也即 S_τ 与 τ 是线性关系, 这就是因为此时特征值 L 趋于极小。

相应地

$$S_\tau = 73 \text{ 时 } \quad \tau = 9.34 \text{ 年}$$

$$S_\tau = 100 \text{ 时 } \quad \tau = 12.79 \text{ 年}$$

$$S_\tau = 540 \text{ 时 } \quad \tau = 69.1 \text{ 年}$$

$$S_\tau = 730 \text{ 时 } \quad \tau = 93.4 \text{ 年}$$

即在 $v = 50$ km/s, S_τ 、 M_L/M_0 确定的情况下工作时间 τ 与 α 的相关性减弱, 几乎是一条直线。 τ 与 S_τ 的相关性极大。

这是在 $v = 50$ km/s下的情况, 如果比冲增加到350 km/s时, 情况是不一样的, 我们来讨论这个情况。

当 $v = 350$ km/s时, 令 M_L/M_0 仍为0.1, S_τ 仍为参数, 设 S_τ 为730 AU (其规律与73 AU时相同), 求任务时间 τ 与功率密度 α 的关系。 α 量纲为kw/kg。

此时截比

$$J = 1 - \frac{S_\tau}{v \cdot \tau} = 1 - \frac{730 \text{ AU}}{350 \times \tau \times 0.315 \times 10^8 / (1.5 \times 10^8)} = 1 - \frac{9.932}{\tau}$$

特征值

$$L = \frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{(350)^2}{2 \times \alpha \times 10^{-3} \times \tau \times 0.315 \times 10^8} = \frac{1.944}{\alpha \cdot \tau}$$

施图林格表达式为

$$1 - \frac{9.932}{\tau} = \frac{\frac{1.944}{\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}{1 - \frac{M_L}{M_0}} \ln \frac{\frac{1.944}{\alpha\tau} + 1}{\frac{1.944}{\alpha\tau} + \frac{M_L}{M_0}}$$

令 M_L/M_0 的任务需求为0.1时, 上式为

$$1 - \frac{9.932}{\tau} = \frac{\frac{1.944}{\alpha\tau} + 0.1}{1 - 0.1} \ln \frac{\frac{1.944}{\alpha\tau} + 1}{\frac{1.944}{\alpha\tau} + 0.1}$$

式中只含 α 和 τ 两个量, 以 α 为变量迭代求解 τ 。

若 $\alpha = 0.1$, 迭代得 $\tau = 29.3$,

$$\text{验算截比: } J = 1 - \frac{9.932}{29.3} = 0.6610$$

$$\text{特征值: } L = \frac{19.44}{29.3} = 0.6635$$

则

$$\frac{L+0.1}{1-0.1} \ln \frac{L+1}{L+0.1} = \frac{0.6635+0.1}{1-0.1} \ln \frac{0.6635+1}{0.6635+0.1} = 0.6610$$

$$\text{当 } \alpha = 1 \text{ 时, } J = 1 - \frac{9.932}{\tau}$$

$$L = \frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{(350)^2}{2 \times 10^{-3} \times \tau \times 0.315 \times 10^8} = \frac{1.944}{\tau}$$

则有

$$1 - \frac{9.932}{\tau} = \frac{\frac{1.944}{\tau} + 0.1}{1 - 0.1} \ln \frac{\frac{1.944}{\tau} + 1}{\frac{1.944}{\tau} + 0.1}$$

迭代得 $\tau = 16.44$ 年,

$$\text{验算: } J = 1 - \frac{9.932}{16.44} = 0.3959$$

$$L = \frac{1.944}{16.44} = 0.1182$$

$$\frac{L+0.1}{1-0.1} \ln \frac{L+1}{L+0.1} = \frac{0.1182+0.1}{1-0.1} \ln \frac{0.1182+1}{0.1182+0.1} = 0.3961$$

表明当 α 从0.1变化到1时, τ 从29.3年降到16.44年。

当 $\alpha = 10$ 时, 迭代有 $\tau = 13.73$ 年,

$$\text{验算: } J = 1 - \frac{9.932}{13.73} = 0.2766$$

$$L = \frac{0.1944}{13.73} = 0.01416$$

$$\frac{L+0.1}{1-0.1} \ln \frac{L+1}{L+0.1} = \frac{0.01416+0.1}{1-0.1} \ln \frac{0.01416+1}{0.01416+0.1} = 0.2769$$

当 $\alpha = 100$ 时, 经迭代得 $\tau = 13.346$ 年

$$\text{验算: } J = 1 - \frac{9.932}{13.346} = 0.2558$$

$$L = \frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{(350)^2}{2 \times 100 \times 10^{-3} \times \tau \times 0.315 \times 10^8} = \frac{19.44}{\tau} \times 10^{-3}$$

$$\frac{L+0.1}{1-0.1} \ln \frac{L+1}{L+0.1} = \frac{0.1}{0.9} \ln \frac{1}{0.1} = 0.2558$$

说明当 $\alpha > 100$ 时, 其特征值 $L = \frac{v^2}{2\alpha\tau} \approx 0$, 而特征表达式

$$E = \frac{L+0.1}{1-0.1} \ln \frac{L+1}{L+0.1} = \frac{0.1}{0.9} \ln \frac{1}{0.1} = 0.2558$$

也即 $\tau = 13.35$ 年。即是我们前面得到的结果, 当 $L \approx 0$ 时, E 为饱和值0.2558。

所以其曲线是饱和的, 但这个饱和值是在 $\alpha > 100$ 时。

上述解析过程说明, 当比冲 I_{sp} 比较小时 (如 50 km/s), 任务时间 τ 与功率密度 α 的关系不大, 几乎是饱和的水平线。它与有效载荷 M_0 及任务距离相关。当比冲 I_{sp} 比较大时 (如350 km/s), 在 $\alpha < 1$ 的情况下, τ 随着 α 的增加而下降; 在 $\alpha > 1$ 的情况下, τ 与 α 的提高无甚大影响, 也是一个饱和线。

2.5 关于推力系统的功率与比冲

从式 (6) 出发

$$S_\tau = v\tau \left[\left(\frac{M_0}{M_\rho} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{M_\rho}{M_0} \right) + 1 \right]$$

$$1 - \frac{S_\tau}{v\tau} = \left(1 - \frac{M_\rho}{M_0} \right) \ln \left(1 - \frac{M_\rho}{M_0} \right), \text{ 可以写作 } J = E.$$

在实际的系统中, $M_L/M_0 < 1$ 是必然的, 前面已经交待过 $\ln \left(1 - \frac{M_\rho}{M_0} \right) < 0$, 且 $1 - \frac{M_\rho}{M_0} < 0$, 即 $\left(1 - \frac{S_\tau}{v\tau} \right) > 0$, 这也是必然的。

前面已经讲过, 截比 $J = 1 - \frac{S_\tau}{v\tau} > 0$, 这是实际系统存在的必然条件, 如果满足不了这个条件, 则没有实现目标的系统存在。这是我们将它称为“截比”的原因, 也是我们将其分离出来作为一个概念的存在理由。

在研究功率 P 与比冲 v 的关系时, 将初始质量 M_0 作为参数, 因功率 $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_\rho}{\tau} v^2$,

$$\therefore M_\rho = \frac{2\tau P}{v^2}$$

代入式 (6) 中,

$$E = \left(1 - \frac{v^2 M_0}{2\tau P} \right) \ln \left(1 - \frac{2\tau P}{v^2} \cdot \frac{1}{M_0} \right) \quad (11)$$

为求解方便, 令 $Q = \frac{2\tau P}{M_0 v^2}$

(可称 Q 为特征参数, 无量纲)

$$\text{则 } E = \left(1 - \frac{1}{Q} \right) \ln(1 - Q)$$

由 $J = E$ 可以迭代求出 Q , 而特征参数 Q 里包含有功率 P 和比冲 v , 也即在 τ 和 M_0 为参数条件下可以得到功率 P 与比冲 $v(I_{sp})$ 的关系。

以 $S_\tau = 73 \text{ AU}$ 、 $\tau = 20$ 年、 $M_0 = 10 \text{ kg}$ 的任务作为一个例子来求解功率 P 与比冲 v 的关系。

首先求截比

$$\begin{aligned} J &= 1 - \frac{S_\tau}{v\tau} \\ &= 1 - \frac{73 \text{ AU}}{v \times 20 \times 0.315 \times 10^8 / (1.5 \times 10^8)} \\ &= 1 - \frac{17.381}{v} \end{aligned}$$

(v 的单位为km/s)

以 $v = 500$ 、 300 、 150 、 50 四点为变量求解其相应的功率值

$$v = 500 \text{ km/s时, } J_{500} = 1 - \frac{17.381}{500} = 0.9652$$

$$v = 300 \text{ km/s时, } J_{300} = 1 - \frac{17.381}{300} = 0.9420$$

$$v = 150 \text{ km/s时, } J_{150} = 1 - \frac{17.381}{150} = 0.8841$$

$$v = 50 \text{ km/s时, } J_{50} = 1 - \frac{17.381}{50} = 0.6524$$

由 $J = E = \left(1 - \frac{1}{Q} \right) \ln(1 - Q)$, 可以迭代得到近似值

$$Q_{500} = 0.0680, (E = \left(1 - \frac{1}{0.068} \right) \ln(1 - 0.068) = 0.9652)$$

$$Q_{300} = 0.1115, (E = \left(1 - \frac{1}{0.1115} \right) \ln(1 - 0.1115) = 0.9420)$$

$$Q_{150} = 0.2144, (E = \left(1 - \frac{1}{0.2144}\right) \ln(1 - 0.2144) = 0.8841)$$

$$Q_{50} = 0.5511, (E = \left(1 - \frac{1}{0.5511}\right) \ln(1 - 0.5511) = 0.6524)$$

$$\text{由 } Q = \frac{2\tau P}{M_0 v^2}, \text{ 可求 } P = \frac{M_0 v^2}{2\tau} Q$$

则当 $M_0 = 10 \text{ kg}$, $\tau = 20$ 年时有

$$P = \frac{10}{2 \times 20 \times 0.315 \times 10^8} \times v^2 \times Q$$

将

$$v_{500} = 500, Q_{500} = 0.0680$$

$$v_{300} = 300, Q_{300} = 0.1115$$

$$v_{150} = 150, Q_{150} = 0.2144$$

$$v_{50} = 50, Q_{50} = 0.5511$$

代入, 且 v 以 m/s 为单位。则 $(500 \text{ km})^2 = (500)^2 \times 10^6 \text{ m}^2$

有

$$\begin{aligned} P_{500} &= \frac{10 \times 10^6}{2 \times 20 \times 0.315 \times 10^8} \times v^2 \times Q \\ &= 0.79365 \times 10^{-2} \times v_{500}^2 \times Q_{500} \\ &= 0.79365 \times 10^{-2} \times (500)^2 \times 0.0680 \\ &= 1.349 \times 10^2 (\text{W}) \end{aligned}$$

$$P_{300} = 0.79365 \times 10^{-2} \times (300)^2 \times 0.1115 = 0.796 \times 10^2 (\text{W})$$

$$P_{150} = 0.79365 \times 10^{-2} \times (150)^2 \times 0.2144 = 0.383 \times 10^2 (\text{W})$$

$$P_{50} = 0.79365 \times 10^{-2} \times (50)^2 \times 0.5511 = 10.93 (\text{W})$$

当 M_0 变化时, 因各参数皆没变化, 所以功率 P 与 M_0 成正比增加。

若 S_τ 仍为 73 AU , τ 为 8 年时,

其截比

$$J = 1 - \frac{S_\tau}{v\tau} = 1 - \frac{73 \text{ AU}}{v \times 8 \times 0.315 \times 10^8 / (1.5 \times 10^8)} = 1 - \frac{43.45}{v}$$

(v 以 km/s 为单位)

仍将 M_0 作为参数, 计算 P 与 v 的关系。

令 M_0 值为 10 kg 时

$$\text{截比 } J = 1 - \frac{43.45}{v}$$

将 $v = 500, 300, 150$ 及 50 km/s 代入, 有

$$\text{表 1 } J = 1 - \frac{43.45}{v}$$

Table 1 The relationship between the intercept ratio J and the specific impulse v

项目	数据			
v	500	300	150	50
J	0.9131	0.8552	0.7103	0.1311

$$E = (1 - \frac{1}{Q}) \ln(1 - Q) \quad (12)$$

由 $J = E = (1 - \frac{1}{Q}) \ln(1 - Q)$ 迭代求解有

$$Q_{500} = 0.164, (E = \left(1 - \frac{1}{0.164}\right) \ln(1 - 0.164) = 0.9131)$$

$$Q_{300} = 0.2629, (E = \left(1 - \frac{1}{0.2629}\right) \ln(1 - 0.2629) = 0.8552)$$

$$Q_{150} = 0.4775, (E = \left(1 - \frac{1}{0.4775}\right) \ln(1 - 0.4775) = 0.7103)$$

$$Q_{50} = 0.9612, (E = \left(1 - \frac{1}{0.9612}\right) \ln(1 - 0.9612) = 0.1311)$$

由式 (11)

$$P = \frac{M_0 v^2}{2\tau} Q = \frac{10 \times v^2 \times Q}{2 \times 8 \times 0.315 \times 10^8} = 1.984 \times 10^{-2} \times v^2 \times Q$$

(此处 v 以 m/s 为单位: 计算 P 时 v 以 m/s 单位计算, 即为 $(v \times 10^3)^2 = v^2 \times 10^6$, 所以 P 的单位是 (W))

$$\therefore P_{500} = 1.984 \times 10^{-2} \times 25 \times 10^4 \times 0.164 = 8.134 \times 10^2 (\text{W})$$

$$P_{300} = 1.984 \times 10^{-2} \times (300)^2 \times 0.2629 = 4.694 \times 10^2 (\text{W})$$

$$P_{150} = 1.984 \times 10^{-2} \times (150)^2 \times 0.4775 = 2.1315 \times 10^2 (\text{W})$$

$$P_{50} = 1.984 \times 10^{-2} \times (50)^2 \times 0.9612 = 4.767 \times 10^1 (\text{W})$$

同样由于 P 与 M_0 成正比关系, 所以随 M_0 的增加, P 呈等比上升的趋势。

下面讨论一下 S_τ 为 540 AU 、 τ 为 24 年时的情况 (M_0 仍为 10 kg):

$$\text{此时的截比 } J = 1 - \frac{540 \text{ AU}}{v\tau}$$

为保证截比条件, $\frac{540 \text{ AU}}{v\tau} < 1$, 则有 $v\tau > 540 \text{ AU}$, 也即在任务时间内其比冲 v 的约束是:

$$v > \frac{540 \text{ AU}}{\tau} \quad (13)$$

在 $\tau = 24$ 年的任务要求时

$$v > \frac{540 \times 1.5 \times 10^8 \text{ km}}{24 \times 0.315 \times 10^8 \text{ s}} = 107.14 \text{ km/s}$$

说明在比冲小于 107 km/s , 是无法到达任务距离的。所以在小于 100 km/s 以下, 不应有数据, 也即这样的条件下在 24 年内是达不到的。

我们以 $\tau = 24$ 年, $M_0 = 10 \text{ kg}$ 为参数, v 仍取 $500, 300, 150$ 及 50 km/s 为变量, 此时的截比

$$\begin{aligned}
 J &= 1 - \frac{S_\tau}{v\tau} \\
 &= 1 - \frac{540 \text{ AU}}{v \times 24 \times 0.315 \times 10^8 / (1.5 \times 10^8)} \\
 &= 1 - \frac{107.14}{v}
 \end{aligned}$$

(此处 v 以km/s为单位)

则有

$$J_{500} = 1 - \frac{107.14}{500} = 0.786$$

$$J_{300} = 1 - \frac{107.14}{300} = 0.643$$

$$J_{150} = 1 - \frac{107.14}{150} = 0.286$$

$$J_{50} = 1 - \frac{107.14}{50} = -1.14$$

出现 $J_{50} < 0$, 不在任务可行范畴(截止小于0, 任务被截止)。

由式(12)求 E

$$E = \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \ln(1 - Q)$$

由 $J = E = \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \ln(1 - Q)$, 经迭代,

J_{500} 时有

$$Q_{500} = 0.371, (E = \left(1 - \frac{1}{0.371}\right) \ln(1 - 0.371) = 0.786)$$

J_{300} 时有

$$Q_{300} = 0.562, (E = \left(1 - \frac{1}{0.562}\right) \ln(1 - 0.562) = 0.643)$$

J_{150} 时有

$$Q_{150} = 0.882, (E = \left(1 - \frac{1}{0.882}\right) \ln(1 - 0.882) = 0.2859)$$

由式(11)

$$P = \frac{M_0 v^2}{2\tau} Q = \frac{10 \times v^2 \times Q}{2 \times 24 \times 0.315 \times 10^8} = 6.6 \times 10^{-3} \times v^2 \times Q$$

(此处 v 以m/s为单位, 即 v^2 表示为 $(v \times 10^3)^2 = v^2 \times 10^6$)

有

$$\begin{aligned}
 P_{500} &= 6.6 \times 10^{-3} \times (500)^2 \times 0.371 \\
 &= 61.215 \times 10 = 6.1215 \times 10^2 (\text{w})
 \end{aligned}$$

$$P_{300} = 6.6 \times 10^{-3} \times (300)^2 \times 0.562 = 3.34 \times 10^2 (\text{w})$$

$$P_{150} = 6.6 \times 10^{-3} \times (150)^2 \times 0.882 = 1.31 \times 10^2 (\text{w})$$

同理它随 M_0 的增加量比例提高。

2.6 关于最终速度 u_τ 与比冲的关系。

由式(5)可得

$$\frac{M_L}{M_0} = \left(1 + \frac{v^2}{2\alpha\tau}\right) e^{-u_\tau/v} - \frac{v^2}{2\alpha\tau}$$

可知

$$\begin{aligned}
 e^{-u_\tau/v} &= \left(\frac{M_L}{M_0} + \frac{v^2}{2\alpha\tau}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{v^2}{2\alpha\tau}\right)} \\
 -u_\tau/v &= \ln\left(\frac{M_L}{M_0} + \frac{v^2}{2\alpha\tau}\right) - \ln\left(1 + \frac{v^2}{2\alpha\tau}\right) \\
 u_\tau &= -v \left[\ln\left(\frac{M_L}{M_0} + \frac{v^2}{2\alpha\tau}\right) - \ln\left(1 + \frac{v^2}{2\alpha\tau}\right) \right]
 \end{aligned} \quad (14)$$

这里面含有 v 、 M_L/M_0 、 α 、 τ 和 u_τ 这5个变量, 此处要求的是 u_τ 与 v 之间的关系。

为此我们将 α 、 τ 作为参数, 而将其 S_τ 、 α 、 τ 条件下的 M_L/M_0 作为中间待求量, 则可得到在这些约束下的最终速度 u_τ 与比冲 $v(Isp)$ 的关系。

下面以 $\tau = 8$ 年、 $\alpha = 0.1 \text{ kw/kg}$ ($10^{-4} \text{ km}^2/\text{s}^3$)、 $S_\tau = 73 \text{ AU}$ 为例具体分析。

在这个例子中, 特征值为

$$L = \frac{v^2}{2\alpha\tau} = \frac{v^2}{2 \times 10^{-4} \times 8 \times 0.315 \times 10^8} = 0.1984 \times 10^{-4} \times v^2$$

在 S_τ 任务距离要求下, 由式(9)可以求出对应的 M_L/M_0 。

当 $v = 150 \text{ km/s}$ 时

$$L = 0.1984 \times 10^{-4} \times (150)^2 = 0.4464$$

由式(9)对应的 $M_L/M_0 = 0.31$, 代入式(14), 得 $u_\tau = -150[\ln(0.4464 + 0.31) - \ln(1 + 0.4464)] = 97.2 \text{ km/s}$, 同样的过程可得表2数据。

表2 式(14)中的 U_τ

Table 2 U_τ in formula (14)

项目	数据							
$v/(\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$	150	200	250	300	350	400	450	500
L	0.446	0.794	1.240	1.786	2.430	3.174	4.018	4.960
M_L/M_0	0.31	0.33	0.31	0.27	0.22	0.16	0.10	0.04
$u_\tau/(\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$	97.2	93.53	92.06	91.17	90.29	89.86	88.96	87.81

由 $v = 150 \text{ km/s}$ 到 $v = 500 \text{ km/s}$ 比冲下的 $S_\tau = 73 \text{ AU}$ 、 $\tau = 8$ 年、 $\alpha = 0.1 \text{ kw/kg}$ 约束的最终速度 u_τ 曲线可参考文献[1]中的图4.3。我们从 $J = 1 - \frac{S_\tau}{v\tau} = 1 - \frac{73}{v \times 8 \times 0.315 / 1.5} = 1 - \frac{43.45}{v}$ 看到, 当 v 从50 km/s到100 km/s增加时, J 从0.131变到0.566, 变化幅度为0.44左右, 但从200 km/s增加到500 km/s时, J 从0.782变到0.913, 其变化幅值仅为0.13, 所以 u_τ 在大于200 km/s之后变化幅值较慢, 几乎是一条直线。

再以 $\tau = 28$ 年为例, S_τ 仍为73 AU、 α 仍为0.1 kw/kg,

这时的特征值

$$L=\frac{v^2}{2\alpha\tau}=\frac{v^2}{2\times10^{-4}\times28\times0.315\times10^8}=0.056\,69\times10^{-4}\times v^2$$

当 $v=50\text{ km/s}$ 时

$$L=0.056\,69\times10^{-4}\times(50)^2=0.014\,17$$

由式（9）对应的 $M_L/M_0=0.58$ ，代入式（14），

得 $u_\tau=-50[\ln(0.014\,17+0.58)-\ln(1+0.014\,17)]=26.73\text{ km/s}$ ，按同样的过程得到表 3。

表 3 式(14)中 U_τ

Table 3 U_τ in formula (14)					
项目	数据				
$v/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	50	100	150	200	250
L	0.014 17	0.056 69	0.127 55	0.226 76	0.354 3
M_L/M_0	0.58	0.75	0.82	0.85	0.87
$u_\tau/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	26.73	26.99	26.088	26.084	25.23
项目	数据				
$v/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	300	350	400	450	500
L	0.510 21	0.694 45	0.907 03	1.147 97	1.417 25
M_L/M_0	0.88	0.89	0.89	0.89	0.89
$u_\tau/(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$	24.838	23.49	23.76	23.65	23.28

这个从50 km/s到500 km/s比冲下的 $S_\tau=73\text{ AU}$ 、 $\tau=28\text{ 年}$ 、 $\alpha=0.1\text{ kw/kg}$ 约束的最终速度 u_τ 与 $v(Isp)$ 的关系即为参考文献1中的图 4-3的 $\tau=28\text{ 年}$ 的曲线。

这个最终速度的求解问题在齐奥尔科夫斯基公式中已经完整表达，这里只是经过施图林格对其中推进系统装置的功率密度定义后将变形为关于有效载荷比 M_L/M_0 的施图林格解的形式。

2.7 有关有效载荷比的归一化解

由
$$\frac{M_L}{M_0}=e^{-u_\tau/v}-\left(\frac{v^2}{2\alpha\tau}\right)(1-e^{-u_\tau/v})$$

其中： $\frac{M_L}{M_0}$ 与 $v(Isp)$ 的关系取决于 α 、 τ 和 u_τ 。

为了绘制一个统一的图，将 u_τ 和 v 都用特征速度 $v_c=\sqrt{2\alpha\tau}$ 进行归一化处理，即 $u_\tau^*=\frac{u}{v_c}$ ， $v^*=\frac{v}{v_c}$ ，这种归一化处理，并不改变 M_L/M_0 的值。

以 v^* 为横坐标、以 u^* 为参数、以载荷比 M_L/M_0 为纵坐标，得到归一化的表达式。

$$\frac{M_L}{M_0}=e^{-u^*/v^*}-(v^*)^2(1-e^{-u^*/v^*})\tag{15}$$

选取 v^* 为0.01、0.02、0.05、0.2、1和10这6个点及 $u^*=0.01、0.02、0.05、0.1$ 的值求解 M_L/M_0 ：

也可将其写成 $\frac{M_L}{M_0}=(1+v^*)e^{-u^*/v^*}-(v^*)^2$ 的形式进行计算更为方便。

当 $u^*=0.01$ 参数下

变量 $v^*=0.01$ 时， $M_L/M_0=0.367\,8$ ；

变量 $v^*=0.02$ 时， $M_L/M_0=0.606\,5$ ；

变量 $v^*=0.05$ 时， $M_L/M_0=0.818\,2$ ；

变量 $v^*=0.2$ 时，

$$\frac{M_L}{M_0}=e^{-0.01/0.2}-(0.2)^2(1-e^{-0.01/0.2})=0.949\,2；$$

变量 $v^*=1$ 时，

$$\frac{M_L}{M_0}=e^{-0.01}-(1)^2(1-e^{-0.01})=0.980\,0；$$

变量 $v^*=10$ 时，

$$\frac{M_L}{M_0}=e^{-0.01/10}-(10)^2(1-e^{-0.01/10})=0.899\,0；$$

可以看出当 $v^*=1$ 时 M_L/M_0 比 $v^*=10$ 和 $v^*=0.2$ 都要大，也即当比冲 v^* 接近特征速度 $\sqrt{2\alpha\tau}$ 时，其载荷比近为极大值。

按同样的过程，求得 $u^*=0.02$ 的载荷比的变化情况，见表 4。

表 4 式(15)中 M_L/M_0

Table 4 M_L/M_0 in formula (15)							
项目	数据						
v^*	0.01	0.02	0.05	0.2	1	2	10
M_L/M_0	0.135 3	0.367 6	0.669 5	0.901 0	0.960 4	0.950 2	0.798 2

也表明 $v^*\neq1$ 时 M_L/M_0 出现极大值。

下面讨论当 M_L/M_0 趋于极小情况下的 u^* 、 v^* 关系。

因 M_L/M_0 取值在（1，0）之间，即不可能没有有效载荷，也不可能全部都是有效载荷，即 $0<M_L/M_0<1$ 。

为了绘制 M_L/M_0 与 v^* 的关系图，我们可以将小于0.04作为 M_L/M_0 的最小边值来考虑。

当 $u^*=0.05$ ， $v^*=0.015$ 时

$$\frac{M_L}{M_0}=e^{-0.05/0.015}-(0.015)^2(1-e^{-0.05/0.015})=0.035\,45<0.04$$

同样可求 u^* 为各值下 v^* 值见表 5。

表 5 式(15)， $M_L/M_0<0.04$ 时， u^* 与 v^* 关系

Table 5 The relationship between u^* and v^* when $M_L/M_0<0.04$ in formula (15)							
项目	数据						
u^*	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
v^*	0.023	0.045	0.07	0.11	0.15	0.18	0.26

在 $v^*>1$ 时，其 M_L/M_0 取下降趋势，在这一段 $M_L/M_0<0.04$ 时的 u^* 、 v^* 的对应关系计算如下

当 $u^* = 0.1$, $v^* = 9.9$ 时

$$\frac{M_L}{M_0} = e^{-0.1/9.9} - (9.9)^2 \ln(1 - e^{-0.1/9.9}) = 0.004\ 93 < 0.04$$

同样可得到 $v^* > 1$ 情况下的相应 u^* 见表6。

表6 式(15), $M_L/M_0 < 0.04$ 、 $u^* > 1$ 时, u^* 与 v^* 关系

Table 6 The relationship between u^* and v^* , when $M_L/M_0 < 0.04$, $u^* > 1$ in formula (15)

项目	数据						
u^*	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
v^*	9.9	4.7	3.2	2.2	1.7	1.3	0.94

我们这样一个点一个点的求取, 就是为了说明 M_L/M_0 存在一个极值点, 在 $v^* = 1$ 的两旁有两个使 M_L/M_0 近似趋向于零的 v^* 值。

对于 M_L/M_0 在每个 u 条件下都有一个 v 使其达到最

$$\frac{du}{dv} = \frac{d}{dv} \left[v \cdot \ln \frac{1 + v^2/2\alpha\tau}{M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau} \right] = \ln \left(\frac{1 + v^2/2\alpha\tau}{M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau} \right) + v \cdot \frac{M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau}{1 + v^2/2\alpha\tau} \cdot \left(\frac{1 + v^2/2\alpha\tau}{M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau} \right)'$$

其中

$$\begin{aligned} \left[\frac{1 + v^2/2\alpha\tau}{M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau} \right]' &= \frac{2v}{2\alpha\tau} \cdot (M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau)^{-1} - (1 + v^2/2\alpha\tau) \cdot (M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau)^{-2} \cdot \frac{2v}{2\alpha\tau} = \frac{(v/\alpha \cdot \tau)[M_L/M_0 - 1]}{(M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau)^2} \\ \frac{du}{dv} &= \ln \left(\frac{1 + v^2/2\alpha\tau}{M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau} \right) + v \cdot \frac{(M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau)}{(1 + v^2/2\alpha\tau)} \cdot \frac{(v/\alpha \cdot \tau)[M_L/M_0 - 1]}{(M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau)^2} \\ &= \ln \left(\frac{1 + v^2/2\alpha\tau}{M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau} \right) + \frac{v^2}{\alpha\tau} \cdot \frac{(M_L/M_0 - 1)}{(1 + v^2/2\alpha\tau) \cdot (M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau)} \end{aligned}$$

令 $\frac{du}{dv} = 0$, 则得到 u 对 v 的极值。

将第二项移到等式另一端则有

$$\ln \left(\frac{1 + v^2/2\alpha\tau}{M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau} \right) = \frac{v^2}{\alpha\tau} \cdot \frac{(1 - M_L/M_0)}{(1 + v^2/2\alpha\tau) \cdot (M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau)} \quad (16)$$

此式即为 u 达到极值的条件, 这个结果是Stuhlinger得到的。

将式(16)再代回到式(14), 即将式(14)中

$$\left[\ln \left(\frac{M_L}{M_0} + \frac{v^2}{2\alpha\tau} \right) - \ln \left(1 + \frac{v^2}{2\alpha\tau} \right) \right] = \ln \frac{M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau}{1 + v^2/2\alpha\tau}$$

用式(16)的右端表达式表示, 得到其 u_{\max} 的表达式为

$$\begin{aligned} u_{\max} &= v \cdot \frac{(v^2/\alpha\tau) \cdot (1 - M_L/M_0)}{(1 + v^2/2\alpha\tau) \cdot (M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau)} \\ &= \frac{v^3}{\alpha\tau} \cdot \frac{(1 - M_L/M_0)}{(1 + v^2/2\alpha\tau) \cdot (M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau)} \quad (17) \end{aligned}$$

u_{\max} 是在 α 和 τ 作为参数, 而不是作为变量的条件下求得的。

大值, 而这个 v 近似等于发动机的特征速度 $v_c = \sqrt{2\alpha\tau}$, 也即当比冲 $v \cong v_c$ 时其载荷比为最大值。这在上述的演算中得到了说明。

在 u^* (u^*/v_c) 较大时, 其极值表现得较为突出, 即两侧的 M_L/M_0 与 $(M_L/M_0)_{\max}$ 的差异比较明显。在 $u^* > 0.05$ 之后, 任务选择时, 对 u^* 和 v_c 的组合值要慎重设计, 否则会因 u^* 越大而 M_L/M_0 变小, 浪费质量。

此处, $v_c = Isp$ (近似值) 取极大值是在上述具体数据下明显反映出来的, 但我们没有给出解析式说明, 据“IPM”介绍, 这个研究结果出现得比较早, 但经常被人们遗忘 (this result is old and often forgotten)。

2.8 关于 $M_L = 0$ 时的极限速度

在最终速度 u 的表达式(14)中, 其比冲是关键参数, 可以得到它的极值解析式 $\frac{du}{dv} = 0$ 。

将其结果推演如下, 由式(14)可得

将 M_L/M_0 从式(17)中重整有

$$\begin{aligned} &(M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau) \left(1 + v^2/2\alpha\tau \right) \cdot \frac{\alpha\tau}{v^3} \cdot u_{\max} \\ &= (1 - M_L/M_0) \\ &(M_L/M_0) \left[\left(1 + v^2/2\alpha\tau \right) \cdot \frac{\alpha\tau}{v^3} \cdot u_{\max} + 1 \right] \\ &= \left[1 - \frac{v^2}{2\alpha\tau} \left(1 + v^2/2\alpha\tau \right) \cdot \frac{\alpha\tau}{v^3} \cdot u_{\max} \right] \end{aligned}$$

$$M_L/M_0 = \frac{1 - \frac{1}{2v} (1 + v^2/2\alpha\tau) \cdot u_{\max}}{1 + (1 + v^2/2\alpha\tau) \cdot \frac{\alpha\tau}{v^3} \cdot u_{\max}}$$

即

$$\begin{aligned} M_L/M_0 &= \frac{1 - (u_{\max}/2v)(1 + v^2/2\alpha\tau)}{1 + (u_{\max}/2v)(1 + v^2/2\alpha\tau) \cdot \frac{2\alpha\tau}{v^2}} \\ &= \frac{1 - (u_{\max}/2v)(1 + v^2/2\alpha\tau)}{1 + (u_{\max}/2v)(1 + 2\alpha\tau/v^2)} \end{aligned}$$

以上表述的就是在最终速度达到 u_{\max} 的时候, 发动

机参数 α 、比冲 v 和工作时间 τ 下的 M_L/M_0 的值, 即任务的载荷比能力。

当 $v \approx \sqrt{\alpha\tau}$ 时, u_{\max} 可写成

$$\begin{aligned} u_{\max} &= v \cdot \frac{(v^2/\alpha\tau)(1 - M_L/M_0)}{(1 + v^2/2\alpha\tau) \cdot (M_L/M_0 + v^2/2\alpha\tau)} \\ &= v \cdot \frac{(1 - M_L/M_0)}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(M_L/M_0 + \frac{1}{2}\right)} \\ &= v \cdot \frac{1 - M_L/M_0}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 \times M_L/M_0)} \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{\alpha\tau} \cdot \frac{1 - M_L/M_0}{1 + 2 \times M_L/M_0} \end{aligned} \quad (18)$$

对于极端情况, 当有效载荷为零的时候, 它的最终速度将是个什么情况, 也即最极限的状态下, $M_L = 0$ 。

这时由式(5)

$$\frac{M_L}{M_0} = e^{-u_\tau/v} - \frac{v^2}{2\alpha\tau} (1 - e^{-u_\tau/v})$$

$M_L = 0$ 时, 得

$$e^{-u_\tau/v} + \frac{v^2}{2\alpha\tau} e^{-u_\tau/v} - \frac{v^2}{2\alpha\tau} = 0$$

$$\text{即 } e^{-u_\tau/v} \left(1 + \frac{v^2}{2\alpha\tau}\right) = \frac{v^2}{2\alpha\tau}$$

$$e^{-u_\tau/v} = \frac{v^2/2\alpha\tau}{1 + v^2/2\alpha\tau} = \frac{v^2/2\alpha\tau}{v^2/2\alpha\tau(1 + 2\alpha\tau/v^2)}$$

$$\text{即 } \frac{1}{e^{u_\tau/v}} = \frac{1}{1 + \frac{2\alpha\tau}{v^2}}$$

$$\therefore e^{u_\tau/v} = \frac{2\alpha\tau}{v^2} + 1$$

$$e^{u_\tau/v} - \frac{2\alpha\tau}{v^2} - 1 = 0$$

也可以表示为

$$\frac{u_\tau}{v} = \ln\left(1 + \frac{2\alpha\tau}{v^2}\right)$$

$$u_\tau = v \ln\left(1 + \frac{2\alpha\tau}{v^2}\right) \quad (19)$$

我们仍对其求导得到极值速度 $u_{\tau\max}$,

$$\frac{du_\tau}{dv} = \ln\left(1 + \frac{2\alpha\tau}{v^2}\right) + v \cdot \frac{v^2}{v^2 + 2\alpha\tau} \cdot \left(\frac{2\alpha\tau + v^2}{v^2}\right)'$$

其中 $\left(\frac{2\alpha\tau + v^2}{v^2}\right)'$ 为

$$\begin{aligned} &\left[(v^2 + 2\alpha\tau) \cdot v^{-2}\right]' \\ &= 2v \cdot v^{-2} + (v^2 + 2\alpha\tau)v^{-3}(-2) \\ &= \frac{2}{v} + \frac{(-2)(v^2 + 2\alpha\tau)}{v^3} = \frac{2v^2 - 2v^2 - 4\alpha\tau}{v^3} \end{aligned}$$

代入原式有

$$\begin{aligned} \frac{du_\tau}{dv} &= \ln\left(1 + \frac{2\alpha\tau}{v^2}\right) + v \cdot \frac{v^2}{(v^2 + 2\alpha\tau)} \cdot \frac{-4\alpha\tau}{v^3} \\ &= \ln\left(1 + \frac{2\alpha\tau}{v^2}\right) - \frac{4\alpha\tau}{2\alpha\tau(1 + v^2/2\alpha\tau)} \\ &= \ln\left(1 + \frac{2\alpha\tau}{v^2}\right) - \frac{2}{1 + v^2/2\alpha\tau} \end{aligned}$$

$\frac{du_\tau}{dv} = 0$, 即

$$\ln\left(1 + \frac{2\alpha\tau}{v^2}\right) = \frac{2}{1 + v^2/2\alpha\tau}$$

这个表达式类型为

$$\ln\left(1 + \frac{1}{Q}\right) = \frac{2}{1 + Q}$$

迭代求解有 $Q = 0.255$

$$\text{即 } \frac{v^2}{2\alpha\tau} = 0.255$$

$$\therefore v = \sqrt{0.255} \cdot \sqrt{2\alpha\tau} = 0.505 \cdot v_c$$

v_c 为特征速度, 如果用 $\sqrt{\alpha\tau}$ 表示

则

$$v = 0.505 \times \sqrt{2} \times \sqrt{\alpha\tau} = 0.714 \sqrt{\alpha\tau}$$

将此处的 v 代入式(19)有

$$\begin{aligned} u_{\tau\max} &= v \ln\left(1 + \frac{2\alpha\tau}{v^2}\right) \\ &= 0.505v_c \ln\left(1 + \frac{1}{(0.505)^2}\right) \\ &= 0.505 \cdot v_c \ln 4.9212 \\ &= 0.805v_c \end{aligned}$$

当用 $v = \sqrt{\alpha\tau}$ 表示时

$$u_{\tau\max} = 0.714v \cdot \ln 4.9212 = 1.14 \sqrt{\alpha \cdot \tau}$$

如果 u_{\max} 用 $v = 0.505 \sqrt{2\alpha\tau}$ 表示时(也即比冲是特征速度的0.505倍, 使 u 达到极值时的速度)。

$$\text{有 } u_{\tau\max} \doteq \frac{0.805v_c}{0.505v_c} = 1.594 \doteq 1.60$$

所以 $u_{\tau\max} = 1.60v$ 是载荷比为0时的极限速度。

上述讨论的是当 $M_L \rightarrow 0$ 时的情况, 由 $M_0 = M_w + M_L + M_\rho$, 当 $M_L \rightarrow 0$ 时 $M_0 = M_w + M_\rho$ 。

这个状态的物理描述, 就是有效载荷 M_L 已经不单

独存在于 M_w 和 M_p 之外。而是纳入到 M_w 之中,也可以说 M_L 不再与 M_w 分离,它成为动力系统的一部分,它的质量已纳入到 M_w 之中,并反映在发动机的功率密度 α 参数表达里。

这个解释,用质量定义的表达里就是

$$M_0 = M_L + M_w + M_p = (M_L + M_w) + M_p = M_e + M_p$$

其中 M_e 为 $(M_0 - M_p)$,火箭的干重,当 $M_L \rightarrow 0$ 时 $M_e = M_w$ 。

至此得到了如下关系:

当 $M_L \rightarrow 0$ 时,有 $M_e = M_w$,此时的终速最大值 $u_{\tau\max} = 1.60v$ (1.6倍比冲)。

继续来分析其质量的关系,由 $u_{\tau\max} = v \ln \frac{M_0}{M_e}$

$$e^{u_{\tau\max}/v} = \frac{M_0}{M_e} = \frac{M_0}{M_w},$$

将 $u = 1.60v$ 代入有

$$\frac{M_0}{M_e} = \frac{M_0}{M_w} = e^{1.60v/v} = 4.953$$

$$\therefore \begin{cases} M_e = M_w = \frac{1}{4.953} M_0 = 0.202 M_0 \\ M_p = M_0 - M_e = (1 - 0.202) M_0 = 0.798 M_0 \\ \frac{M_p}{M_w} = 3.95 \end{cases}$$

上述质量关系是从 $M_L \rightarrow 0$ 时取得的,但其结果是极具价值的,反过来讨论,也即在 $M_p = 0.8M_0$,或推进剂是干重的4倍左右时火箭的最终速度取极值,其速度可到1.60倍比冲,而此时的比冲值为0.505倍的特征速度 $\sqrt{2\alpha\tau}$ 。

在 $u_{\tau\max} = 1.60v$ 中, v 是表达在 $\alpha = \frac{M_p \cdot v^2}{2M_w \cdot \tau}$ 之中的,

$$\text{所以 } \alpha\tau = \frac{M_p}{2M_w} v^2,$$

其 M_p/M_w 已经上面的运算得到近似为 $\frac{0.8M_0}{0.2M_0} = 4$

$$\alpha\tau = 2v^2$$

$$\sqrt{\alpha\tau} = \sqrt{2}v$$

$$\text{即有 } \frac{u_{\tau\max}}{\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{1.60v}{\sqrt{2}v} = 1.1313$$

而在前面式(18)中

$$u_{\tau\max} = \frac{4}{3} \sqrt{\alpha\tau} \cdot \frac{1 - M_L/M_0}{1 + 2M_L/M_0}$$

将 $M_L \rightarrow 0$ 代入

$$u_{\tau\max} = \frac{4}{3} \sqrt{\alpha\tau}$$

$$\frac{u_{\tau\max}}{\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{4}{3} = 1.33$$

这两种方法得到的解中,以1.1313为精确解,因式(18)是在 $v = \sqrt{\alpha\tau}$ 时得到的,所以1.33则为近似解,相差近17%。

上述结论是图林格施在1964年给出去的,我感觉他不但给出了结论,而且贡献了方法。这点对我们的启发则更大,这也是我们“工程方法”论研究值得关注的地方。

当将 M_L 的质量纳入总干重里时,如果任务要求的 M_L 已经确定下来,则要在其它的干重质量上减重,如果发动机的 M_w 项或火箭其它的质量降不下来,则 M_L 就难以实现了。这是在工程权衡中值得重视的地方。

在齐奥尔科夫斯基公式或施图林格的变形表达式中,其最终速度 u_τ 只与推进系统的质量相关,所以其它一切概念的引入实质上都是质量关系的变形。

$$\text{比如 } V^*, \text{ 它等于 } \left(\frac{v}{\sqrt{2\alpha\tau}} \right),$$

$$\text{而由 } \alpha \text{ 的定义可知 } \alpha = \frac{M_p \cdot v^2}{2\tau M_w}$$

$$\text{所以 } V^* = \frac{v}{\sqrt{2\tau \cdot \frac{M_p}{2\tau M_w} \cdot v^2}} = \sqrt{\frac{M_w}{M_p}}$$

也即 $(V^*)^2$ 的物理定义是推进系统干重与推进剂质量之比的物理量。

当 v^* 增加时,表明 M_w 的相对量在增加,而推进剂 M_p 的量相对在减少,所以在获得一定的速度 u_τ 下其载荷比要下降。这点在前面分析的趋势中 $v^* > 1$ 之后的下降段可以明确地看到。

一个发动机的 α 值和 τ 是相关的,也即它与任务时间要求相关,这点我们要进一步讨论。

我们验证一下 $v^* = 1$ 、 $u^* = 0.2$ 时的载荷比 M_L/M_0 为0.637 (参见式(15))。因为我们所讲的 v^* 为 $\sqrt{\frac{M_w}{M_p}}$,则通过施图林格的解得到的 u^* 和通过齐氏公式得到的结果必然是是一致的。

$$\text{将 } v^* = 1 = \sqrt{\frac{M_w}{M_p}},$$

$$\text{即 } M_w = M_p \text{ 代入 } u_\tau = v \cdot \ln \frac{M_0}{M_w + M_L} \text{ 中,}$$

$$\text{从施图林格解中得到 } M_L = 0.637 M_0$$

$$\therefore M_p = M_w = \frac{1}{2} (1 - 0.637) M_0 = 0.1815 M_0$$

$$\therefore M_w + M_L = 0.637 M_0 + 0.1815 M_0 = 0.8185 M_0$$

$$\text{则 } u_\tau = v \cdot \ln \frac{M_0}{0.8185 M_0} = 0.2v$$

而施图林格解为

$$\frac{M_L}{M_p} = e^{-u^*} - (1 - e^{-u^*}) = 2e^{-u^*} - 1 = 0.637$$

$$\therefore u^* = 0.2$$

这两者的结果是相同的。

3 深空探测的轨道转移方式

行星际飞行的基本条件是飞出地球, 然后才能讨论飞往其它行星。所谓飞出地球, 从动力学而言, 就是地球的引力势已经近乎为零。

当飞行器的主动力工作结束, 它只受空间某个主星体作用时, 其“推引比 ρ ”为零, $\rho \equiv a(t)/g(R(t))$ 。

其中, $a(t)$ 表示非引力作用引起的加速度, 在光帆作为推力器时它就是光压产生的加速度, 此时也称 ρ 为“压引比”(Lightness Number), 在IPM任务的中译本中称为“明度”。

$g(R(t))$ 是空间中存在的星体对飞行器产生的引力加速度。

所以我将其形象地称为推力和引力之比。在只有 $g(R(t))$ 的作用下, 它的运动规律完全附合我们在地球引力场中所研究的结果:

$$\text{轨道方程: } r_i = \frac{h^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + e \cos \theta},$$

$$\text{动量矩守恒: } h = \sqrt{r_p \mu (1 + e)},$$

$$\text{机械能守恒: } \frac{1}{2} V_i^2 - \frac{\mu}{r_i} = E,$$

式中 r_i 、 θ 为轨道极坐标参数的矢径和近点角; μ 为主星的引力常数; r_p 、 e 是轨道的形状、近拱点和偏心率; h 为角动量(E 为“比机械能”, 即单位质量具有的能量)。

因能量是守恒的, 在轨道动力学分析时, 往往选择特征点(如 r_p 、 r_a 两点)来分析是方便的。

$$\begin{aligned} \text{由 } E &= \frac{1}{2} V_p^2 - \frac{\mu}{r_p} \\ r_p &= \frac{h^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + e} \end{aligned}$$

$$\therefore V_p = \frac{h}{r_p} = \frac{\mu(1+e)}{h}$$

$$\text{即 } E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2}{h^2} (1 - e^2)$$

这个表达式对任何主星情况下都是适用的, 只是改变其引力常数 μ 。

当 $e = 1$ 时, 能量 $E = 0$

r_i 、 V_i 都随着 θ 角的变化而改变着, 而 $(1 + e \cos \theta)$ 项将从“2”变为“0”, 其 r 将趋于无穷, 轨道是随着 θ 的增加而越来越远的抛物线。

由 $E = 0$ 有

$$\frac{1}{2} V_p^2 - \frac{\mu}{r_p} = 0$$

$$\text{即 } V_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r_p}}$$

这个近地点的速度 V_p 就是 r 可以趋于无穷的轨道速度, 在深空探测中它可以完成向远程空间输送航天器脱离主星引力的基本任务。但由于此时的能量已经为零, 所以它没有剩余能量飞向深远太空, 我们称这个速度为逃逸速度。对深远太空而言它可以完成逃逸任务。

在 $e > 1$ 时, 能量 $E > 0$

$$\theta = 0^\circ, r_0 = \frac{h^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + e}$$

$$\theta = 90^\circ, r_{90} = \frac{h^2}{\mu}$$

$$\theta = 180^\circ, r_{180} = \frac{h^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - e} < 0$$

所以, 不会出现 $\theta = 180^\circ$ 的状态, 这是一条开放的双曲线。在直角坐标系描述下, 此点是以纵轴为对称的一实一虚两条对称曲线, 其中一条是不实现的, 只是实轨道的一个影像。但在计算双曲线的半长轴时, 我们还要用到这个概念(虚的远地点)。讲到这里我想加一句文外之话, 在轨道动力学研究中, 其轨道的几何特征表现得很充分且有神来之意, 所以我曾讲过, 我们应当有一章专门讲讲“轨道的几何学”。

双曲线的奇点出现在 $(1 + e \cos \theta) = 0$ 处, 这时的 $\theta = \arccos(-1/e)$, 记作 θ_∞ , 它是在 $r \rightarrow \infty$ 时的近点角。

由于 θ 是在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 之间, 所以有 $\sin \theta_\infty = \sqrt{e^2 - 1}/e$ 。在双曲线几何里称 θ_∞ 为渐近线近点角, 也称 $\delta = 2\theta_\infty - 180^\circ$ 为两渐近线的转向角。

因 $E > 0$, 航天器的总能量大于主星引力势且有剩余能量, 靠其剩余能量可以飞向更深的空间, 但前提是 $g(R(t))$ 不对其影响, 而对于太阳系行星际飞行, 其太阳的 $g(R(t))$ 是存在的。

双曲线轨道下的总能量

$$E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2}{h^2} (1 - e^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2}{h^2} (e^2 - 1)$$

我们仍沿用 r_a 、 r_p 这两个特殊点来计算其能量,

$$\text{因为 } |r_a| - r_p = \left| \frac{h^2}{\mu(1-e)} \right| - \frac{h^2}{\mu(1+e)} = \frac{2h^2}{\mu(e^2-1)}$$

双曲线几何学的半长轴 a 有

$$2a = |r_a| - r_p = \frac{2h^2}{\mu(e^2-1)}$$

$$\therefore a = \frac{h^2}{\mu(e^2-1)}$$

代入能量 E 的表达式有 $E = \frac{\mu}{2a}$

即

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a} \quad (20)$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (21)$$

v_{∞} 称为双曲线轨道下的剩余速度, v_{∞} 表示 E ,

则有 $E = \frac{1}{2}v_{\infty}^2$

因 $V_{\text{逃逸}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$, 则 $\frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}v_{\text{逃逸}}^2$

将 E 和 $V_{\text{逃逸}}$ 代入(20)式, 有

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_{\text{逃逸}}^2 = \frac{1}{2}v_{\infty}^2$$

即

$$v^2 = v_{\text{逃逸}}^2 + v_{\infty}^2 \quad (22)$$

这个关系是双曲线轨道下任何一点都满足的, 是一个比能量的关系(消去了质量项)。它表明双曲线轨道的总能量包括两部分: 一个是超出主星中心引力逃逸所需的能量 $v_{\text{逃逸}}^2$ 及超出这个逃逸能量的剩余部分。对于每个任务的不同, 形成的双曲线的形状不同(即半长轴 a), v_{∞} 是不同的。称 v_{∞}^2 为特征能量, 它只与主星的引力常数 μ 和轨道半长轴有关, 记为 C_3 ($C_3 = v_{\infty}^2$)。

因为 C_3 是逃逸后剩余的能量, 所以要由深空探测任务给出特征值 C_3 的需求, 并在工程实践中要有充分的运载能力来保证, $C_{3(\text{运载})} > C_{3(\text{任务})}$ 。

C_3 的形成是运载火箭所赋予的, 从工程角度说它是任务所需求的。式(21)表明 C_3 的大小可以从轨道的几何表达里唯一确定(即半长轴 a)。

在当今的深空探测工程中, 仍然是以化学推进系统产生巨大的推力将航天器送入逃逸轨道(对地球而言就是双曲线轨道), 然后由航天器上的动力系统实现对目标星体的速度增量。如果我们有足够推力的运载火箭, 可以实现 $C_{3(\text{火箭})} \geq C_{3(\text{任务需求})}$ 的条件下, 则可以大大减少航天器本身的推力系统的压力。

以火星探测轨道需求, 火箭提供给航天器的能量应满足

$$v^2 = v_{\text{逃逸}}^2 + v_{\infty}^2$$

其中 $v_{\text{逃逸}}^2 = \frac{2\mu_{\text{地}}}{r_{\text{地-器}}}$ ($r_{\text{地-器}}$ 为航天器与地球中心距离), $r_{\text{地-器}}$ 以(6 378+300)km计算时

$$v_{\text{逃逸}}^2 = \frac{2 \times 398\,600}{6\,378} = 119.377 \text{ (km}^2/\text{s}^2\text{)}$$

例如, 对某一次具体的任务, 若入轨时火箭提供的速度为11.473 km/s,

$$\text{则 } v_{\infty}^2 = (11.473)^2 - 119.377 = 12.25 \text{ (km}^2/\text{s}^2\text{)}$$

即运载火箭能够给探火星航天器的特征能量是

$$C_3 = v_{\infty}^2 = 12.25 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

但对于深远空探测任务而言, 只利用大推力火箭实现需求速度往往是难以办到的, 因为它的比冲难以得到足够的大。而施图林格的连续推力系统是加速度积分的机理, 它是在任务时间(MHJT)内完成目标的较为有希望的方案。

从已经实现的人类探测太阳系行星的工程来看, 还没有实现在MHJT的理想时间内完成所关心的深远目标星的探测期望, 飞行器还是需要几十年的巡航时间过程。

以我们现在的火箭能力, 如果在日地影响球边缘处(距地92 500 km)使航天器具备 C_3 , 那它按这个速度奔向火星的话, 它要在太阳的引力势内飞行, 所以 C_3 仍然是进入环绕太阳的大椭圆路径; 如果火箭在日地影响球边缘处使航天器具有逃逸太阳的能量, 则这时的剩余能量则可以直奔太阳系边缘而去, 而不受太阳引力势的作用, 那么这个速度应当是多少呢?

我们先计算在地面脱离地球的能量

$$V = \sqrt{\frac{2\mu_{\text{地}}}{r_{\text{R}}}} = \sqrt{\frac{2 \times 398\,600}{6\,378}} = 11.18 \text{ km/s}$$

在地表处地球自转的牵连速度

$$V_e = \frac{2\pi \cdot 6\,400}{24 \times 3\,600} = 0.465 \text{ km/s}$$

要想脱离地球引力势, 其速度一定要大于(11.18~0.465) km/s。在日地影响球半径($r_{\text{Sol}} = 9.25 \times 10^5 \text{ km}$)时, 地球引力势和太阳引力势分别为

$$\frac{\mu_{\text{地}}}{r_{\text{地/器}}} = \frac{398\,600}{925\,000} = 0.43 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

$$\frac{\mu_{\text{日}}}{r_{\text{日/器}}} = \frac{1.327 \times 10^{11}}{(1.5 + 0.009\,25) \times 10^8} = 0.879 \times 10^3 \text{ s}^2/\text{km}^2$$

可见此时太阳的作用是地球的2 000倍, 所以此时只考虑太阳的作用是合理的。

怎样实现从原轨道向目标星轨道的大椭圆转移呢?

如果设定这个转移时刻是准确的, 则在航天器飞行到目标星的预测点时, 目标星也正好到达该点, 两者交会。太阳系内各行星的运动规律我们已经充分掌握, 所以这个假定在工程上是可以实现的。但深空探

测对空间飞行体的跟踪与观测要求要比近地空间活动更高, 在下面讨论的转移轨道问题中, 精确的外测保证是十分重要的条件。

当航天器已经脱离了地球的引力势, 我们的分析就只是太阳和航天器的两体问题。若此时航天器的位置是A, 目标星的期望到达点是B。(也即是两者交会点的期望值。)

我们的任务就是要构建一个大椭圆轨道, 使其成为霍曼轨道上的两个点, 且目标星位置正是近点角为 π 的远地点B。(见图1)

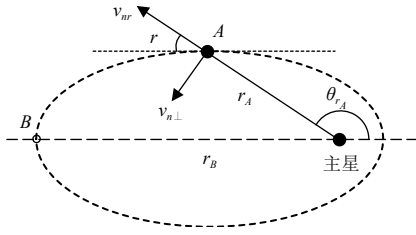


图1 新构建的大椭圆轨道

Fig. 1 The large elliptical transfer orbit

将新构建的轨道参数写作 r_n 、 θ_n 、 h_n 、 e_n , 其拱线为目标星的期望点B与主星中心的连线, 已知的参数是 θ_{nA} 、 r_A 、 r_B 以及主星的引力常数 μ 。

从轨道方程

$$r_A = \frac{h_n^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + e_n \cos \theta_{nA}}$$

$$r_B = \frac{h_n^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + e_n(-1)}, (\theta_{nB} = \pi)$$

其中 h_n 和 e_n 是两个待求量

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{1 - e_n}{1 + e_n \cos \theta_{nA}}$$

得到

$$e_n = \frac{r_B - r_A}{r_B + r_A \cos \theta_{nA}} \quad (23)$$

将 e_n 代入 r_B 式, 有

$$r_B = \frac{h_n^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r_B - r_A}{r_B + r_A \cos \theta_{nA}}}$$

$$h_n^2 = \mu \cdot r_B \cdot \frac{r_A (1 + \cos \theta_{nA})}{r_B + r_A \cos \theta_{nA}}$$

$$h_n = \sqrt{\mu \cdot r_A r_B} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \theta_{nA}}{r_B + r_A \cos \theta_{nA}}} \quad (24)$$

得到 e_n 和 h_n 就得到了这个新构建的从A点到B点的一个大椭圆轨道。

$$r_n = \frac{h_n^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + e_n \cos \theta_n}$$

这是从轨道的几何关系里求得的, 但这个轨道能否实现, 要看工程上能不能使 h 值达到这个能量需求。

A点的能量需要也即轨道的需求速度, A点的速度 V_A 可以分解为对矢径的径向和垂向两部分组成,

其中垂向

$$V_{n\perp} = \frac{h_n}{r_{nA}} = \frac{h_n}{\frac{h_n^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + e_n \cos \theta_{nA}}} = \frac{\mu (1 + e_n \cos \theta_{nA})}{h_n}$$

径向 V_{nr} 是矢径 r_n 方向的速度, 也即

$$V_{nr} = \dot{r} = \left(\frac{h_n^2}{\mu} \cdot \frac{1}{1 + e_n \cos \theta_{nA}} \right)' = \frac{h_n^2}{\mu} \cdot \frac{e_n \cdot \sin \theta_{nA}}{(1 + e_n \cos \theta_{nA})^2} \cdot \dot{\theta}_{nA}$$

而 $\dot{\theta} = \frac{V_{\perp}}{r_{nA}} = \frac{h_n}{(r_{nA})^2}$, 将 $\dot{\theta}_{nA}$ 及 $r_{nA} = \frac{h^2}{\mu(1 + e_n \cos \theta_{nA})}$ 代入 V_{nr} 中得到

$$V_{nr} = \frac{\mu}{h_n} e_n \cdot \sin \theta_{nA}$$

则所需的速度矢量与航天器和主星中心的连线的夹角(称为飞行路径角) γ 的正切值 $\tan \gamma = V_r/V_{\perp}$, 则

$$\gamma = \arctan \left(\frac{e_n \sin \theta_{nA}}{1 + e_n \cos \theta_{nA}} \right)$$

只有在工程上实现航天器的飞行路径角 γ 及速度值 $\sqrt{V_{n\perp}^2 + V_{nr}^2}$, 才能保证转移轨道的实现。

以上讨论的就是在太阳系的行星际探测中大椭圆转移的方式。不论其初始轨道时的状态为何, 最终都要满足我们分析的状态。

工程实践上就要在测控系统的支持下完成 V_{\perp} 、 V_r 及飞行路径角 γ 的实现。

针对连续推力的施图林格方案, 在 $g(R(t))$ 的作用相对 $a(t)$ 已经很小时, 比如在太阳帆方案时, 太阳帆飞行器的质量比较轻。

下面我们就连续推力的太阳帆的有关问题作为例子来讨论。

太阳光直射太阳伞反射面时, 它的平面功率密度为 1368 W/m^2 (地表面处)

功率是力与速度之积, 而光速是已知的, 所以其地表处的太阳光压 P 可以表示为

$$P = S_o/c$$

其中: S_o 为太阳辐射功率(1368 W/m^2); c 为光速(以 $3 \times 10^5 \text{ km/s}$ 计)。则地球表面的太阳光压为

$$P = \frac{1368 \times 10^6 \mu\text{W/m}^2}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 4.56 \mu\text{N/m}^2$$

我们讲的“压引比”，则是太阳帆上的太阳辐射压力与太阳帆所受太阳引力的比值（The lightness number, which is the ratio of solar radiation pressure force on the sail to solar gravitation force on the sail）。这个定义与“推力引力比”的概念是一样的，如果不是太阳帆，而是其它的推力系统，则这个比值则可统称为“推引比”，即 $\rho = a_c(t)/g(R(t))$ ，其中 $a_c = P/m$ ，如果都以太阳帆面积 A 作为衡量的基准，则 P 是单位面积上分摊的动力（ P/A ，单位是 N/m^2 ），而 m 则是单位面积的质量，即有

$$\sigma = \sigma_{\text{sail}} + m_{\text{PL}}/A$$

其中： σ_{sail} 为太阳帆的面质量密度； m_{PL} 为航天器有效载荷质量； A 为太阳帆的面积。

在实际工程上还要考虑太阳帆的反射率、为控制合理温度而增加的太阳帆结构涂层的发射率等，还有太阳光入射方向与太阳帆法线的太阳光压角等因素要在 q_{\perp} 上得到反映，即形成有效光压 P_{eff} 。在垂直入射时，

$$p_{\text{eff}} = 2 \cdot (S_0/c) q_{\perp}$$

$$a_c = P_{\text{eff}}/(\sigma_{\text{sail}} + m_{\text{PL}}/A)$$

若 P_{eff} 按 $2 \times 4.56 \mu\text{N/m}^2$ 计算，

A 为 100 m^2 ， $\sigma_{\text{sail}} = 10 \text{ g/m}^2$ ， $m_{\text{PL}} = 10 \text{ kg}$

则在地球附近可获得的加速度为

$$a_{c1} = \frac{2 \times 4.56 \mu\text{N/m}^2}{10 \text{ g/m}^2 + 10 \times 10^3 \text{ g}/100 \text{ m}^2}$$

$$= \frac{2 \times 4.56 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{110 \times 10^{-3} \text{ kg}}$$

$$= 0.0829 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2 = 82.9 \times 10^{-3} \text{ mm/s}^2$$

如果仍保持太阳帆的总质量不变，而将 σ_{sail} 从 10 g/m^2 降到 1 g/m^2 。则因太阳帆总质量不变，所以其帆的面积将扩大10倍；相应的 m_{PL}/A 将缩小10倍，其加速度将为

$$a_{c2} = \frac{(2 \times 4.56 \mu\text{N/m}^2) \times 10}{(10 \text{ g/m}^2 + 10 \times 10^3 \text{ g}/100 \text{ m}^2)/10} = 100a_{c1}$$

（ a_{c2} 是 a_{c1} 的100倍）

所以 σ_{sail} 是极其重要的技术参数。

在G.L.Matloff的“Deep-Space Probes, 2nded, 中给出了另一种表达式^[3]

$$\text{加速度 } A_{s/c} = (1 + \rho_{\text{sail}}) S / (c \sigma_{s/c})$$

其中： ρ_{sail} 为太阳帆对日光的发射率； S 为单位时间照

射到太阳帆单位面积的太阳能 $S = S_0/r^2$ ， r 为太阳距地球表面距离 r_0 与航天器距太阳距离 r 之比，以AU为单位； c 为光速； $\sigma_{s/c}$ 为压引比。

在这个表达式中，光压为 $(1 + \rho_{\text{sail}}) S / c \cdot r^2$ ，我们把加速度 $A_{s/c}$ 整理为两部分

$$A_{s/c} = \left(\frac{S_0}{c \cdot r^2} \right) \cdot [(1 + \rho_{\text{sail}}) / \sigma_{s/c}]$$

第一部分是自然参数，太阳辐照 S ，光速 c 和距太阳之距 r ；

第二部分是与太阳帆航天器相关的物理参数，帆的反射率 ρ_{sail} 和航天器的帆面积的分摊质量 $\sigma_{s/c}$ 。

定义 $\eta_{s/c} \doteq (1 + \rho_{\text{sail}}) / \sigma_{s/c}$ 为“压引比”，

$(1 + \rho_{\text{sail}})$ 项表示太阳帆具有的光压，而 $\sigma_{s/c}$ 则表示是受到引力作用的质量项。是光压与引力之比，这也是将其称为压引比的原因。

如果我们将“外太阳系”理解为仍在太阳引力范畴，这里的行星体仍以太阳为主星，环绕太阳运行。而不是指“太阳系外”的其他星系。这就把“Outersolar System”和“Outer Space”分开了。（但这点只供参考）

在20~30年的“MHJT”可承受时间内要求到达200 AU处。则航天器的平均飞行速度不能小于7 AU/年，

$$\text{平均速度 } \bar{V} \geq \frac{7 \times 1.496 \times 10^8 \text{ km}}{365 \times 24 \times 3600 \text{ s}} = 33 \text{ km/s}$$

逃逸太阳的速度

$$V_{\text{逃逸}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\text{日}}}{r_{\text{日地}}}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.327 \times 10^{11}}{1.496 \times 10^8}} = 42.12 \text{ km/s}$$

因地球的公转速度是可以利用的。

$$V_{\text{公转}} = \frac{2\pi \times 1.496 \times 10^8}{365 \times 24 \times 3600} = 29.8 \text{ km/s}$$

速度增量

$$\Delta V_{\text{III}} = V_{\text{逃逸}} - V_{\text{公转}} = 42 - 29.8 = 12.2 \text{ km/s}$$

对于一个脱离太阳引力的航天器，首先要具备逃逸地球的能力，所以从地球出发的航天器应具有的能力应为

$$V_{\text{III}}^2 = V_{\text{II}}^2 + \Delta V_{\text{III}}^2 = 125 + (12.2)^2 = 273.84$$

$$V_{\text{III}} = 16.55 \text{ km/s}$$

这就是从地球表面出发脱离太阳引力的第三宇宙速度。

$$\text{由 } v^2 = v_{\text{逃逸}}^2 + v_{\infty}^2$$

$$\text{其中 } v_{\text{逃逸}}^2 = v_{\text{III}}^2 = (16.55 \text{ km/s})^2$$

$$C_3 = v_{\infty}^2 = (\bar{V})^2 = (33 \text{ km/s})^2$$

$$\therefore v^2 = (273.9 + 1\,089)\text{km}^2/\text{s}^2 = 1\,362.9\text{km}^2/\text{s}^2$$

这对目前的火箭能力而言是难以实现的。

美国新地平线实现的 $C_3 \cong 160\text{km}^2/\text{s}^2$, 它要奔赴100 AU处需37年以上。

即使我们采用太阳帆或利用太阳能的电推进系统, 都会因为随着飞离太阳的距离增加而衰减。这也给航天器携带高比冲的连续推力系统方案加了权。还有一个问题是, 如果有对目标星体的环绕探测或驻留特殊点的探测要求时, 一定要具备航天器的制动能力。我们在前面有关连续推力过程中没有涉及制动阶段(Braking Stage)的问题。

在太阳帆技术的研制方面, 我认为材料的研制是关键, 特别是帆载荷 σ , 这是个关键参数。

以石墨烯的应用为例, 其面质量密度是有希望达到 $1\text{g}/\text{m}^2$ 的。碳原子间距约为 0.14nm , 所以在 1m^2 的面积内, 可布有 51×10^{18} 个碳原子($1\text{m}^2/(0.14 \times 10^{-9})^2\text{m}^2$);

$$\text{原子质量单位 } 1u \cong 1.66 \times 10^{-27}\text{kg} = 1.66 \times 10^{-24}\text{g}$$

碳原子为12个原子质量单位, 则 1m^2 的质量为 $51 \times 10^{18} \times 12 \times 1.66 \times 10^{-24}\text{g}/\text{m}^2 \cong 1\text{mg}/\text{m}^2$, 如果能采用这个轻质材料的资源, 根据太阳帆工作状态下的热量、刚度、展开强度等工程要求而增加其它的聚合物, 是可以在 $1\text{g}/\text{m}^2$ 的指标下, 有所作为的。

NASA在1999年提出的星际探测方案中, 质量只有几百千克, 其中有效载荷25 kg, 太阳帆直径400 m。初始椭圆轨道近日点 $0.25 \sim 0.3\text{AU}$, 航天器在此处展开太阳帆, 借助近太阳的辐射压, 此处是地球(1 AU)处的16~11倍。报告称, 它可以让航天器在大约20年内到达太阳风层顶(200 AU处)。

以上说明的是连续推力系统的深空探测问题。还有一种方案是选择相应的机会, 利用空间天体的 $g(R(t))$ 做动力, 这种方式被称为行星际探测的借力飞行问题。

就其深空探测的轨道实现而言大致包括3种可采用的方式: 连续推力系统, 脉冲推力的大椭圆转移和空间的借力飞行。

关于连续推力系统中受到重视的是太阳帆离子推子和核动力, 有关这些方面的技术研究要引起关注。

后 记

施图林格提出实现太空船的电力推动问题可能是在二战期间, 但他在《离子推进的空间飞行》一书中所引用的文章《Possibilities of Electrical Space Ship Propulsion》是在1954年发表, 不知他是否还有更早时间发表的文章中谈及电力推进的概念。

我得到IPM (Interstellar Precursor Mission) 是在2013年IAA会议上, 由中国宇航出版社出版, 主编是(美) Claudio Bruno及(美) Gregory Mattoff, 中译本译者是陈杰、殷前根先生。

看过之后, 启发诸多, 总想把其中的几个重要的概念性东西(比如施图林格精确解的推导; 精确解中应当单独提出来的几个概念; 太阳帆的压引比及最终速度 u_r 的分析等)解析一下, 今天算初步做了一点讨论。

为了能得到施图林格的原著《Ion Propulsion for Space Flight》全文, 我请国家国防科工局科技与质量司及中国航天科技集团有限公司系统研究院的同志帮忙, 他们费了不少功夫, 总算找到, 并复印给我。据说原本已经很陈旧, 共373页, 署名ERNST STUHLINGER (George C. Marshall Space Flight Center National Aeronautics and Space Administration)。在这里感谢同志们的帮助, 使我看到了原著, 也让我思考了不少东西。特别是施图林格从齐奥尔科夫斯基公式中提出“功率密度”, 并展开一系列推演的思路, 是具有科技方法论意义的。

我希望在研究深空探测的推力系统和工程的实施方案时能关注施图林格的方法和成果, 并能有所创新和发展。

附录:

在施图林格的原著和IPM的任务中有若干图表, 这些图表的形成我用“计算任务书”的形式表达如下, 供有兴趣者参考。

(任务书1): 求有效载荷比与比冲的关系

以 M_L/M_0 为纵轴(最小值0, 最大值1.0, 分格间隔0.2), $\log v^*$ 为横轴(v 最小值0.01、最大值为10, 分格按步长0.01), 以 u_r^* 为参数, 计算 $\frac{M_L}{M_0} = e^{-u_r^*/v^*} - (v^*)^2(1 - e^{u_r^*/v^*})$ 或 $\frac{M_L}{M_0} = (1 + v^*)e^{-u_r^*/v^*} - v^{*2}$ 。

u_r^* 分别为0.01, 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.81时, $v^*=0.01 \sim 10$, 步长0.01, 计算 M_L/M_0 并对每个 u_r^* 下的数据连成曲线。(得到文献1之图4-1)

(任务书2):

任务距离 $S_r = 73\text{AU}$

以 M_L/M_0 为纵轴(最大值为1.0, 分格间隔0.1), v 为横轴(最小值50 km/s, 最大值500 km/s, 分格间隔50 km/s),

以 $\alpha = 0.1 \times 10^{-3}\text{km}^2/\text{s}^3$ 为固定参数,

以 τ 分别为 $5 \times 0.315 \times 10^8\text{s}$, $8 \times 0.315 \times 10^8\text{s}$, $12 \times 0.315 \times 10^8\text{s}$, $16 \times 0.315 \times 10^8\text{s}$, $20 \times 0.315 \times 10^8\text{s}$,

$24 \times 0.315 \times 10^8$ s, $28 \times 0.315 \times 10^8$ s 条件下, 变量 v 由 50 ~ 100 km/s, 步长 50 km/s 的 $\frac{v^2}{2\alpha\tau}$, $J = 1 - \frac{S_\tau}{v\tau}$,

求解:

$$1 - \frac{S_\tau}{v\tau} = \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + M_L/M_0}{1 - M_L/M_0} \ln \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + 1}{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + M_L/M_0}$$

得到 M_L/M_0 , 按每一 τ 值下的 M_L/M_0 连成一条曲线。

(得到文献1之图 4-2)。

(任务书3):

任务距离 $S_\tau = 73$ AU

以 M_L/M_0 为纵轴 (最小值 0.3, 最大值为 1.0, 分格间隔 0.1), v 为横轴 (最小值 50 km/s, 最大值 500 km/s, 分格间隔 50 km/s),

与任务书2相同, 将 $\tau = 20 \times 0.315 \times 10^8$ s 作为固定参数, 在 α 分别为 0.1 kw/kg (0.1×10^{-3} km²/s²)、0.2 kw/kg、0.3 kw/kg、0.4 kw/kg 作为参数条件下, 以 v 为变量, v 从 50 ~ 500 km/s、步长 50 km/s,

求解:

$$1 - \frac{S_\tau}{v\tau} = \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + M_L/M_0}{1 - M_L/M_0} \ln \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + 1}{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + M_L/M_0}$$

得到 M_L/M_0 , 按每一 α 值下的 M_L/M_0 连成一条曲线。

(得到文献1之图 4-5)。

(任务书4):

任务距离 $S_\tau = 540$ AU

以 M_L/M_0 为纵轴 (最小值 0, 最大值为 0.3, 分格间隔 0.05), v 为横轴 (最小值 50 km/s, 最大值 500 km/s, 分格间隔 50 km/s),

以 $\alpha = 0.1 \times 10^{-3}$ km²/s² 为固定参数,

在 $\tau = 22 \times 0.315 \times 10^8$ s、 $24 \times 0.315 \times 10^8$ s、 $28 \times 0.315 \times 10^8$ s 情况下, 以 v 为变量, v 从 50 ~ 500 km/s、步长 50 km/s, 计算施图林格通用精确解,

求解:

$$1 - \frac{S_\tau}{v\tau} = \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + M_L/M_0}{1 - M_L/M_0} \ln \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + 1}{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + M_L/M_0}$$

解出相应 M_L/M_0 , 按每一 τ 值下的 M_L/M_0 连成一条曲线。

(得到文献1之图 4-6)。

(任务书5):

任务距离 $S_\tau = 540$ AU

以 M_L/M_0 为纵轴 (最小值 0, 最大值为 0.6, 分格间隔 0.1), v 为横轴 (最小值 50 km/s, 最大值 500 km/s, 分格间隔 50 km/s),

以 $\tau = 24 \times 0.315 \times 10^8$ s 为固定参数, 在 $\alpha = 0.1 \times 10^{-3}$ km²/s²、 0.2×10^{-3} km²/s²、 0.3×10^{-3} km²/s²、 0.4×10^{-3} km²/s² 的情况下, 以 v 为变量, v 从 50 ~ 500 km/s、步长 50 km/s, 求解施图林格通用精确解:

$$1 - \frac{S_\tau}{v\tau} = \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + M_L/M_0}{1 - M_L/M_0} \ln \frac{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + 1}{\frac{v^2}{2\alpha\tau} + M_L/M_0}$$

解出相应 M_L/M_0 , 按每一 α 值下的 M_L/M_0 连成一条曲线。

(得到文献1之图 4-7)。

(任务书6): 任务时间 τ (年) 与功率密度 α 的关系

S_τ 分别为 73、100、540、730 AU,

τ 以年计, v 以 km/s 计, 时

$$J = 1 - \frac{S_\tau}{v\tau \times 0.315 \times 10^8 / 1.5 \times 10^8} = 1 - 4.762 \frac{S_\tau}{v\tau}$$

当 $L = \frac{v^2}{2\alpha\tau}$ 式中, α 以 kw/kg 计时

$$L = \frac{v^2}{2 \times 10^{-3} \times \alpha\tau}$$

计算施图林格通用精确解:

$$J = \frac{L + M_L/M_0}{1 - M_L/M_0} \ln \frac{L + 1}{L + M_L/M_0}$$

求解 L , 因 J 、 L 中含有 M_L/M_0 、 α 、 τ 、 v 、 S_τ 五个参数, 此题可以按 4 种组合分别计算。

1) $v = 50$ km/s, $M_L/M_0 = 0.1$,

S_τ 分别取 73、100、540、730 AU,

求 τ 与 α 的关系。

$$J = 1 - \frac{4.762}{50} \cdot \frac{S_\tau}{\tau}$$

$$L = \frac{(50)^2}{2 \times \alpha \times 10^3 \tau} = \frac{1.25}{\alpha\tau}$$

施图林格解:

$$1 - \frac{0.095 \ 24 S_\tau}{\tau} = \frac{\frac{1.25}{\alpha\tau} + 0.1}{1 - 0.1} \ln \frac{\frac{1.25}{\alpha\tau} + 1}{\frac{1.25}{\alpha\tau} + 0.1}$$

令 α 依次取 0.1、1、10、100、1 000、10 000, 可得

到相应的 τ 。

以 τ 为纵坐标(最小值0, 最大值为100, 分格间隔20), 以 $\log \Delta$ 为横坐标作图(最小值0.1, 最大值为10 000, 分格间隔 $\log \Delta = 1$, 即从-1~4)。

变换 S_τ 则得到另一条关系线。

此图有对应 S_τ 的4条关系线。

该图即为文献1之图4-8。

2) $v = 50 \text{ km/s}$, $M_L/M_0 = 0.6$,

其余过程同1。

作图: 其纵轴 τ 最小值为0, 最大值为320, 分格间隔40; α 最小值为0.1, 最大值为10 000, 分格间隔 $\log \Delta = 1$ 。

得到的关系即为文献1之图4-9。

3) $v = 350 \text{ km/s}$, $M_L/M_0 = 0.1$,

其余过程同1。

作图: 纵轴最小值0, 最大值40, 分格间隔10; 横轴最小值0.1, 最大值为10 000, 分格间隔

$\log \Delta = 1$ 。

得到的关系即为文献1之图4-10。

4) $v = 350 \text{ km/s}$, $M_L/M_0 = 0.6$,

其余过程同1。

作图: τ 纵轴最小值为0, 最大值为70, 分格间隔10; α 横轴最小值为0.1, 最大值为10 000, 分格间隔 $\log \Delta = 1$ 。

得到的关系即为文献1之图4-11。

(任务书7): 求解功率 P 与比冲 v 的关系
求解步骤如下:

1) 首先求截比 J

$$J = 1 - \frac{S_\tau}{v\tau}$$

在 $\tau = 20$ 年、 $S_\tau = 73 \text{ AU}$ 任务条件下,

令 $v_i = 50 \text{ km/s} \sim 500 \text{ km/s}$ 、步长 50 km/s ,

则 J 是一个简单的计算, 可得下表:

$$(\tau = 20 \text{ 年}, S_\tau = 73 \text{ AU}, J = 1 - \frac{43.45}{v})$$

$$2) \text{ 由 } J_i = E = \left(1 - \frac{1}{Q_i}\right) \ln(1 - Q_i)$$

求解 Q_i

3) 由

$$P = \frac{M_0 v_i^2}{2\tau} Q_i = \frac{M_0 \times 10^6 \times v_i^2}{2 \times 20 \times 0.315 \times 10^8} Q_i = 7.937 \times 10^{-4} M_0 v_i^2 Q_i$$

4) 以 M_0 分别为10、100、1 000、10 000及100 000 kg
计算相应的 P_i , (M_0 , v_i , Q_i 已取值)

5) 以 $\log P$ 为纵轴, 以 v 为横轴, 画出 P 与 v 的关系
作图: 纵轴 $\log P$ 的最小值为1, 最大值为7, (即

$1.E + 0.1 \sim 1.E + 0.7$), 横轴 v 最小值 50 km/s ,

最大值 500 km/s , 步长 50 km/s),

则得到文献1之图4-12。

6) 以 $S_\tau = 73 \text{ AU}$ 、 $\tau = 8$ 年任务条件下重复上述
(1~5)

步骤, 作图的各坐标标度与上面相同。

得到文献1之图4-13。

7) 以 $S_\tau = 540 \text{ AU}$ 、 $\tau = 24$ 年任务条件下重复上述
(1~5)

步骤, 作图的各坐标标度与上面相同。

得到文献1之图4-14。

参 考 文 献

- [1] BRUNO C. Key Technologies to Enable Near-Term Interstellar Scientific Precursor Missions — International Academy of Astronautics 及其中译本“星际科学先导任务”——实现近期目标的关键技术[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2013.
- [2] MCNEILL P C. Ion propulsion for space flight[D]. NEW YORK: [s.n.], 1964.
- [3] MATILOFF G L. Deep-Space Probes[D]. UK: Springer-Praxis, 2005.
- [4] CURTIS H D. Orbital Mechanics for engineering student(轨道动力学)[D]. USA: [s.n.].
- [5] 何世禹, 杨德庄, 焦正宽. 空间材料手册(第一卷, 空间环境物理状态)[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2012.
- [6] 崔平远. 深空探测器自主导航与控制[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2016.

作者简介:

栾恩杰(1940—), 男, 中国工程院院士。主要研究方向: 自动控制, 航天工程管理等。

通信地址: 北京市海淀区阜成路甲8(100048)

电话: (010) 88306319

E-mail: lejoffice@139.com

Continuous Propulsion Dynamics in very Far Space Exploration and Analysis of the Stuhlinger's Solution

LUAN Enjie

(State Administration of Science, Technology and Industry for National Defence, PRC, Beijing 100048)

Abstract: The exploration of the very far space in solar system will be a main target of the next phase of deep space exploration activities. The achievement of this goal relies on the breakthrough of the continuous propulsion power technology. Basing on the description of the Stuhlinger's solution for spaceflight under continuous constant thrust, the relationships between the key parameters such as the payload ratio, mission time and flight distance of the very far space missions and the engine performance are analyzed. The conditions that the engine specific impulse and power need to satisfy and their effects on the payload ratio and the final flight speed are given under specific mission duration and specific flight distance requirements. In addition, the large elliptical transfer orbit and its transfer energy requirement of planetary exploration in solar system are derived under the two-body orbital dynamics, and the key technical indicators involved in the continuous thrust solar sail mission are theoretically calculated. These conclusions are the summerized by the basic theory of continuous propulsion scheme in deep space exploration, which can provide important inspiration and guidance for China's future deep space activities.

Key words: very far space; continuous thrust; stuhlinger's solution

High lights:

- If the engine power density, mission time, and mission distance are specified, the payload ratio reaches the maximum value when the specific impulse is equal to a certain characteristic velocity.
- The value of $(1 - \frac{S_\tau}{v\tau})$ is defined as the cutoff ratio, and $\frac{S_\tau}{v\tau} < 1$ is specified as the boundary condition of the mission.
- The sail load is an important parameter reflecting the performance of the solar sail. The key technology of the solar sail propulsion scheme is to develop new materials with smaller sail loads.

[责任编辑: 高莎, 英文审校: 朱恬]