利用Breakwell间距比法制定行星际探测中途修正策略

倪彦硕[1]，施伟璜[2]，杨洪伟[1]，宝音贺西[1]，李俊峰[1]
(1. 清华大学 航天航空学院，北京 100084；2. 上海卫星工程研究所，上海 200240)

摘 要： 详细介绍了制定行星际探测中途修正策略的Breakwell间距比法，给出了在燃料最优条件下，终端误差精度和制导能力与中途修正设计次数和时刻之间的解析关系。一般而言，终端误差精度每提高3倍，修正次数就需要增加1次，制导能力每提升3倍，修正次数就可以减少1次。在具体使用上，应首先根据精度要求和制导能力确定最后一次修正时刻，然后向前递推，使得前一次修正后误差传播量与后一次修正后误差传播量成公比为1/3的等比数列，以此确定其余修正时刻，从而保证在达到终端精度前提下，整体燃料消耗最少。以火星探测为例，给出探测器于2018年5月出发12月达到火星的算例，仿真结果表明了理论分析的正确性。

关键词： Breakwell间距比；中途修正；制导策略；燃料最优

中图分类号： V448.232 **文献标识码：** A **文章编号：** 2095-7777(2016)01-0083-7

DOI: 10.15982/j.issn.2095-7777.2016.01.013

引用格式： 倪彦硕, 施伟璜, 杨洪伟, 等. 利用Breakwell间距比法制定行星际探测中途修正策略[J]. 深空探测学报, 2016, 3(1): 83–89.

Reference format: Ni Y S, Shi W H, Yang H W, et al. Midcourse correction strategy of interplanetary exploration with breakwell spacing ratio method [J]. Journal of Deep Space Exploration, 2016, 3(1): 83–89.

0 引 言

在深空探测任务中，中途修正是必要的环节。轨道中途修正的必要性主要有两方面的原因。首先，探测器轨道姿态的测量和控制也存在着误差，探测器在深空中运行的过程中会受到各种摄动作用的影响。即使很微小的误差，在经过长时间的传递后也会使得终端状态的偏差很大；其次，在轨道设计的过程中，有时需要考虑行星保护计划，既为了防止除探测器以外的其他无用部件落到被探测的行星造成污染，也保证探测器在无机动情况下不会与目标星体相撞，在航行过程中，不同阶段的探测器位置离目标星体的距离是不同的，因此在适当的时刻需要实施轨道修正，以调整探测器位置。

如表1所示，美国从1964年到1969年先后3次成功发射了“水手4号”(Mariner 4)、“水手6号”(Mariner 6)和“水手7号”(Mariner 7)，完成了火星飞越任务；并在1971年发射“水手9号”(Mariner 9)，首次进入火星轨道，完成了火星环绕任务。根据目前掌握的资料，这4次任务中，前3次飞越任务仅在发射后不久进行了一次中途修正，“水手9号”曾经计划在发射后和入轨前各进行1次修正，但是第2次修正因为精度已经达到设计要求而取消。如表2所示，20世纪70年代，美国还成功地向火星发射了两枚着陆任务探测器，“海盗1号”(Viking 1)和“海盗2号”(Viking 2)。20世纪90年代以来，美国重新启动了火星探测计划，成功实施环绕火星任务的探测器包括2001年发射的“火星奥德赛号”(2001 Mars Odyssey)火星探测卫星，以及2005年发射的火星勘测轨道飞行器(Mars Reconnaissance Orbiter，MRO)侦查卫星。两者整个轨道转移过程中设计轨道修正次数均为5次。成功实施带有着陆器的火星任务有1996年的“拓荒者号”，2003年分别载有“勇气号”(Spirit，MER-A)和“机遇号”(Opportunity，MER-B)两辆火星探测车的“火星漫游者”(Mars Exploration Rover，MER)、2007年的“凤凰号”火星探测器(Phoenix)。另外，2011年发射的“火星科学实验室”(Mars Science Laboratory)，于2012年秋在火星进行精准登陆。包含着陆任务的探测器，整个轨道转移过程中设计轨道修正次数为6次。2013年12月1日，印度火星探测器在近地点点火进入地火转移轨道，经过297天飞行，于2014年9月24日完成火星入轨。印度这次火星探测环绕任务在中途转移过程中经过了3次修正，分别在发射后第10天，发射后第192天和入轨前2天。

收稿日期：2015-10-05；修回日期：2015-11-04
基金项目：高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20120002110078)

表1 美国早期火星探测任务中途修正情况

Table 1 Midcourse corrections of early Mars exploration missions of USA

任务名称	任务时长/d	任务类型	计划修正时间	计划修正次数	实际修正时间	实际修正次数
水手4号	352	飞越	N/A	N/A	*L*+7	1
水手6号	157	飞越	N/A	N/A	*L*+5	1
水手7号	131	飞越	N/A	N/A	*L*+12	1
水手9号	168	环绕	N/A *E*-30	2	*L*+6 取消	1

表2 20世纪90年代以来部分火星探测任务中途修正情况

Table 2 Midcourse corrections of some Mars exploration missions since 1990s

任务名称	任务时长/d	任务类型	计划修正时间	计划修正次数	实际修正时间	实际修正次数
拓荒者号	212	着陆	*L*+30 *L*+60 *E*-60 *E*-10 *E*-10.5h 或 *E*-5.5h	5	*L*+37 *L*+61 *E*-58 *E*-9 取消	4
奥德赛号	204	环绕	*L*+9 *L*+90 *E*-40 *E*-12 *E*-24h 或 *E*-6.5h	5	*L*+46 *L*+87 *E*-37 *E*-12 取消	4
勇气号	208	着陆	*L*+10 *L*+52 *E*-50 *E*-8 *E*-2 或 *E*-1 *E*-4h	6	*L*+10 *L*+52 *E*-50 *E*-8 取消 取消	4
机遇号	201	着陆	*L*+10 *L*+62 *E*-64 *E*-8 *E*-2 或 *E*-1 *E*-4h	6	*L*+10 *L*+62 取消 *E*-8 取消 取消	3
侦察轨道器	210	环绕	*L*+15 *L*+90 *E*-40 *E*-10 *E*-24h 或 *E*-6h	5	*L*+15 *L*+98 *E*-35 取消 取消	3
凤凰号	289	着陆	*L*+6 *L*+60 *E*-45 *E*-15 *E*-8 或 *E*-5 *E*-21h 或 *E*-8h	6	*L*+6 *L*+81 *E*-45 取消 *E*-8 取消	4
印度火星轨道探测器	297	环绕	N/A N/A N/A	N/A	*L*+10 *L*+192 *E*-2	3

随着我国深空探测任务的进一步推进，需要对中途修正策略的制定方法进行进一步研究。目前可查阅到的美国火星探测任务工程报告中对于中途修正策略的表述都只有原计划修正时间和实际修正时间，以及在轨道计算中考虑到的种种因素。至于根据什么原则制定总修正次数和每次修正时间没有叙述。如果在修正策略制定的问题上缺少整体规划，那么在具体修正时间的选择上就会缺少依据，因为单纯从每次修正时

间与燃料消耗考虑，通常燃料消耗会随着修正时间推迟而增加，过早进行修正又可能会增加修正次数，从而可能增加总燃料消耗。

美国人Breakwell在20世纪60年代提出了针对行星间直接转移轨道最小燃料消耗的Breakwell间距比策略[1]。中国在研究中提到过这个策略的有杨嘉墀(2001)、李军锋(2012)和胡军(2013)等人。其中杨嘉墀(2001)[2]在《航天器轨道动力学与控制》一书中对Breakwell间距比策略的描述是“尽快进行初始修正，以后各次修正时刻的修正效应与前一时刻之比为常数，直至满足误差要求，不再进行修正。即初始修正后，选择修正时刻为t_1，t_2，…，t_N，N为不定数，满足设定条件下，使得施加速度增量大小的期望之和最小。”李军锋(2012)[3]在其硕士论文中虽然提到了这个策略，但是最终的策略设计中并没有体现对修正次数与修正时间的计算。胡军(2013)[4]在研究月地返回轨道中途修正方案中提到了采用Breakwell的间距比策略，但是选择的修正间隔是时间上的等差数列。可见中国在深空探测研究中对于修正策略的制定方法并没有研究透彻并达成一致。对于Breakwell间距比策略的理论依据和实际应用不够清楚。因此本文详细介绍了Breakwell间距比策略的推导，给出了依据该方法制定中途修正策略的算例，并且利用Breakwell间距比策略可以清楚地给出终端误差精度和制导能力与中途修正设计次数的关系。

1　Breakwell间距比法推导

本节中将推导Breakwell间距比法的解析表示。在Breakwell间距比策略中，首先考虑转移轨道和修正脉冲都在一个平面的二维情况。考虑终端B平面矢量作为脱靶量，在二维情况下终端B平面矢量的大小B是时间、位置与速度的函数，即$B=B\left(t,x,y,\dot{x},\dot{y}\right)$。假设在两次脉冲修正之间脱靶量保持不变，即

$$B\left(t_{n-1},x_{n-1},y_{n-1},\dot{x}^{+}_{n-1},\dot{y}^{+}_{n-1}\right)=B\left(t_n,x_n,y_n,\dot{x}^{-}_{n},\dot{y}^{-}_{n}\right)=B_{n-1} \tag{1}$$

现在假设$\tilde{B}_{n-1}$表示在第n–1次修正和第n次修正间基于观测计算出的脱靶量。由于每一次修正的目标都是将误差消除，因此修正速度脉冲分量在线性近似下应满足

$$\tilde{B}_{n-1}+\frac{\partial B\left(t_n,x_n,y_n,\dot{x}_n,\dot{y}_n\right)}{\partial\dot{x}_n}\tilde{\Delta}\dot{x}_n+\frac{\partial B\left(t_n,x_n,y_n,\dot{x}_n,\dot{y}_n\right)}{\partial\dot{y}_n}\tilde{\Delta}\dot{y}_n=0 \tag{2}$$

其中偏导数沿无修正标称轨道计算。

用$\partial B\left(t_n\right)/\partial\dot{x}$和$\partial B\left(t_n\right)/\partial\dot{y}$代替上述偏导数并用$B_v\left(t_n\right)$表示它们的平方根

$$B_v\left(t_n\right)=\sqrt{\left[\frac{\partial B\left(t_n\right)}{\partial\dot{x}_n}\right]^2+\left[\frac{\partial B\left(t_n\right)}{\partial\dot{y}_n}\right]^2} \tag{3}$$

用a_n表示偏导数矢量的方向，进而用$\tilde{\Delta}v_n$表示速度大小，用$\tilde{\Delta}\phi_n$表示速度方向，这样方程可以写成$B_v\left(t_n\right)\tilde{\Delta}v_n\cos\left(\tilde{\phi}_n-a_n\right)=-\tilde{B}_{n-1}$。为使$\tilde{\Delta}v_n$最小化，应当使得|cos(□$_n a_n$)|最大化

$$\tilde{\phi}_n=\begin{cases}a_n & \tilde{B}_{n-1}<0\\ a_n+\pi & \tilde{B}_{n-1}>0\end{cases} \tag{4}$$

这样计算出的速度增量为$\tilde{\Delta}v_n=\left|\tilde{B}_{n-1}\right|/B_v\left(t_n\right)$。如果实际操作时速度脉冲的方向和大小有偏差，分别为$\phi_n=\tilde{\phi}_n+\epsilon_\phi{}^n$和$\Delta v_n=\tilde{\Delta}v_n+\epsilon_v^n$，在忽略二阶项的情况下，第$n$次修正后的脱靶量为

$$B_n=B_{n-1}+\left(\tilde{\Delta}v_n+\epsilon_v^n\right)B_v\left(t_n\right)\cos\left(\tilde{\phi}+\epsilon_\phi{}^n-a_n\right) \tag{5}$$

因为方程(4)中的选择方式，$\epsilon_\phi{}^n$对于B_n的第一阶没有影响(余弦函数泰勒展开后一阶项为0)。如果计算所得的$\tilde{B}_{n-1}$和实际的B_{n-1}相差ϵ_B^{n-1}，即$\tilde{B}_{n-1}=B_{n-1}-\epsilon_B^{n-1}$，那么根据$\tilde{B}_{n-1}$大于或小于0，有

$$\begin{aligned}B_n&=B_{n-1}+\left(\tilde{\Delta}v_n+{}_v^n\right)B_v\left(t_n\right)\cos\left(\tilde{\phi}_n+\epsilon_\phi{}^n-a_n\right)\\&=B_{n-1}+\tilde{\Delta}v_nB_v\left(t_n\right)\cos\left(\tilde{\phi}_n+\epsilon_\phi{}^n-a_n\right)+\\&\quad\epsilon_v^nB_v\left(t_n\right)\cos\left(\tilde{\phi}_n+{}_\phi{}^n-a_n\right)\\&=\tilde{B}_{n-1}+{}_B^{n-1}+\tilde{\Delta}v_nB_v\left(t_n\right)\cos\left(\tilde{\phi}_n+\epsilon_\phi{}^n-a_n\right)+\\&\quad{}_v^nB_v\left(t_n\right)\cos\left(\tilde{\phi}_n+\epsilon_\phi{}^n-a_n\right)={}_B^{n-1}\pm\epsilon_v^nB_v\left(t_n\right)\end{aligned} \tag{6}$$

这说明在一次修正脉冲之后的轨迹精度同时受到之前测控弧段的定轨计算误差以及该次修正执行误差的影响。为方便起见，根据$\tilde{B}_{n-1}$大于或小于0定义速度增量的大小$\Delta\omega_n=\pm\Delta v_n$以及速度执行误差的大小$\epsilon_\omega^n=\pm\epsilon_v^n$。这样根据前面的推导可得

$$\Delta v_n=\tilde{\Delta}v_n+\epsilon_v^n=\frac{\left|\tilde{B}_{n-1}\right|}{B_v\left(t_n\right)}+\epsilon_v^n\Rightarrow\Delta\omega_n=\frac{\tilde{B}_{n-1}}{B_v\left(t_n\right)}+\epsilon_\omega^n \tag{7}$$

利用方程及之前叙述，并且用n1代替n得到

$$\begin{aligned}\Delta\omega_n&=\frac{\tilde{B}_{n-1}}{B_v\left(t_n\right)}+\epsilon_\omega^n=\frac{\epsilon_B^{n-2}+\epsilon_v^{n-1}B_v\left(t_{n-1}\right)-{}_B^{n-1}}{B_v\left(t_n\right)}+\epsilon_\omega^n\\&=\left[\epsilon_\omega^n-\frac{\epsilon_B^{n-1}}{B_v\left(t_n\right)}\right]-\frac{B_v\left(t_{n-1}\right)}{B_v\left(t_n\right)}\\&\quad\left[\epsilon_\omega^{n-1}-\frac{{}_B^{n-2}}{B_v\left(t_{n-1}\right)}\right],n>1\\\Delta\omega_1&=\left[\epsilon_\omega^1-\frac{{}_B^0}{B_v\left(t_1\right)}\right]-\frac{B_0}{B_v\left(t_1\right)},n=1\end{aligned} \tag{8}$$

方程(8)说明了第n个速度增量以及由此可以计算出的第n次修正燃料消耗，取决于在第n个修正点及之前的误差。这个方程中第一个方括号中的项代表了当前定轨误差与速度执行误差，第二个方括号代表先前的误差。对于给定的t_{n-1}，因式$B_v(t_{n-1})/B_v(t_n)$随着t_n接近预计抵达时间变得无穷大，这证明用以补偿先前误差(即ϵ_ω^{n-1}和ϵ_B^{n-2})的必要速度增量随着修正执行时间(t_n)的推移而增加。另一方面，对于一定的终端精度，过早地修正可能会增加总的修正次数，从而导致不必要的燃料消耗。如果假定推进剂消耗速度恒定，那么总燃料消耗和速度增量满足如下关系

$$\sum_n \Delta v_n = \sum_n \Delta\omega_n = c\log_3^R \tag{9}$$

其中：c是推进剂消耗速度；R是初始和末端质量之比。

基于燃料消耗最优的指导策略是确定时间序列$\{t_n\}$使得方程最小。严格地说，因为方程中的$\Delta\omega_n$是随机变量，应当力争选择序列$\{t_n\}$使得在满足一定终端精度要求的前提下要求速度增量$\Sigma E(|\Delta\omega_n|)$的期望值最小。

假设速度执行误差ϵ_ω^n独立于轨迹位置，并且假设其均值为0，标准差为σ_v；假设对终端脱靶量ϵ_B^{n-1}的估计在t_{n-1}和t_n之间完成，并且弧段接近t_n时刻，这样速度比位置对于脱靶量影响要大。这个影响随着t_n接近抵达时间会递减并趋于0。进一步假设$\epsilon_B^{n-1}/B_v(t_n)$服从正态分布，均值为0，标准差为$\sigma'$，并且与速度执行误差$\epsilon_\omega^n$无关。这样，方程中每一个方括号都满足如下表达式，其中$\xi_n \tilde{N}(0,1)$

$$\left[\epsilon_v^n - \frac{\epsilon_B^{n-1}}{B_v(t_n)}\right] = \sqrt{{\sigma_v}^2 + \sigma'^2}\,\xi_n \tag{10}$$

这样方程中的$\Delta\omega_n(n>1)$是正态分布随机变量，因此当$n>1$时，所有修正速度期望之和为

$$\sum_{n>1} E(|\Delta\omega_n|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{{\sigma_v}^2+\sigma'^2}\sum_{n>1}\left\{1+\left[\frac{B_v(t_{n-1})}{B_v(t_n)}\right]^2\right\}^{1/2} \tag{11}$$

第一次速度修正增量$\Delta\omega_1$取决于初始脱靶量B_0，这也是一个随机变量，可以假设其均值为0，标准差为σ_{B_0}，所以第一次速度增量的期望可以写为

$$\sum_{n>1} E(|\Delta\omega_1|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{{\sigma_v}^2 + \sigma'^2 + \frac{{\sigma_{B_0}}^2}{[B_n(t_1)]^2}\right\}^{1/2} \tag{12}$$

因为一般情况下$B_v(t)$单调递减至0，所以最后一次修正时间t_N应该满足修正后误差传递到终端符合精度要求，即$B_v(t_N) \leqslant {B_v}^*$，${B_v}^*$是给定的容许脱靶误差，这样就得到了所需要优化的表达式

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{N} E(|\Delta\omega_n|)}{\sqrt{\frac{2}{\pi}\left({\sigma_v}^2+\sigma'^2\right)}} = F = \left\{1+\frac{{\sigma_{D_0}}^2}{\left({\sigma_v}^2+\sigma'^2\right)[D_n(t_1)]^2}\right\}^{1/2} + \sum_{n=2}^{N}\left\{1+\left[\frac{B_v(t_{n-1})}{B_v(t_n)}\right]^2\right\}^{1/2} \tag{13}$$

假设$B_v(t_n)/B_v(0)=\tau_n$，${B_v}^*/B_v(0)=\tau^*$，${\sigma_{B_0}}^2/\left({\sigma_v}^2+\sigma'^2\right)/B_v^2(0)=K^2$。现在的问题可以描述为找到$N$以及$\tau_1 \leqslant 1$，并且$\tau_N \leqslant \tau^*$的序列$\tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_N$，使得$F$函数最小。

$$F = \sqrt{1+\frac{K^2}{{\tau_1}^2}} + \sum_{n=2}^{N}\sqrt{1+\frac{{\tau_{N-1}}^2}{{\tau_N}^2}} \tag{14}$$

通过一系列包含求解条件极值问题的数学推导，可把F由此化简为只是N的函数

$$F = \begin{cases} \sqrt{1+K^2} + (N-1)\left\{1+\tau^{*-\frac{2}{N-1}}\right\}^{1/2} \\ N-1 \geqslant -\dfrac{\log_3(\tau^*)}{\log_3(K)}\,\tau_1 = 1 \\ N\left\{1+K^{\frac{2}{N}}\tau^{*-\frac{2}{N}}\right\}^{1/2} \\ N-1 < -\dfrac{\log_3(\tau^*)}{\log_3(K)} \end{cases} \tag{15}$$

进一步处理得到N和F分别为

$$N = 1+\log_3\left(\frac{K}{\tau^*}\right), \quad F = \sqrt{1+K^2} + 2.9\log_3\left(\frac{K}{\tau^*}\right)$$

$$\text{或}\ N = \log_3\left(\frac{K}{\tau^*}\right), \quad F = 2.9\log_3\left(\frac{K}{\tau^*}\right) \tag{16}$$

通过比较两组N和F的取值，可以发现F的两个形式分别对应$K>3.0$和$K<3.0$。由此推导出二维情况下燃料最优的中途修正策略

$$\begin{cases} B_v(t_N) = {B_v}^* \\ \dfrac{B_v(t_1)}{B_v(t_2)} = \dfrac{B_v(t_2)}{B_v(t_3)} = \cdots = \dfrac{B_v(t_{N-1})}{B_v(t_N)} = 3 \end{cases} \tag{17}$$

在这两种情况下，总修正次数和对应的F函数分别为

$$N=\begin{cases}1+\log_3\dfrac{B_v(0)}{B_v^*}\\ \log_3\left(\dfrac{\sigma_{B_0}}{B_v^*\sqrt{\sigma_v^2+\sigma'^2}}\right)\end{cases}$$

$$F_{\min}=\begin{cases}\left\{1+\dfrac{\sigma_{D_0}^2}{\left(\sigma_v^2+\sigma'^2\right)[B_v(0)]^2}\right\}^{1/2}+2.9\log_3\dfrac{B_v(0)}{B_v^*}\\ \sigma_{B_0}>3B_v(0)\sqrt{\sigma_v^2+\sigma'^2}\\ 2.9\log_3\dfrac{\sigma_{B_0}}{B_v^*\sqrt{\sigma_v^2+\sigma'^2}}\\ \sigma_{B_0}<3B_v(0)\sqrt{\sigma_v^2+\sigma'^2}\end{cases}\tag{18}$$

式(18)中的第一个等式反映了终端误差精度与发射误差对于中途修正次数的影响，式(17)则反映了制导能力对于中途修正时刻的影响。这样的推导说明在二维情况下，前一次修正后误差传播量与后一次修正后误差传播量应该是公比为1/3的等比数列。如果误差传播与时间有较好的线性关系，那么每次修正发生时剩余转移时间应该为等比数列。但是由于修正速度脉冲可能在转移轨迹面外有分量，因此中途修正问题不会是一个纯二维问题，因此需要考虑三维情况。利用转移过程中角动量$rv\cos\gamma$守恒，假设垂直于标称轨道平面的制导问题与面内制导独立，并且可以假设垂直于标称轨迹平面的脱靶量计算与脉冲修正原理与标称面内的问题一致，假定修正速度脉冲在轨道平面外分量v'，第n次修正的速度增量可以近似为

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\sigma_v^2+\sigma'^2\right)}\left\{2+\left[\frac{D_v(t_{n-1})}{D_v(t_n)}\right]^2+\frac{\sin^2(\theta_f-\theta_{n-1})}{\sin^2(\theta_f-\theta_n)}\right\}^{1/2}$$

$$n>1,\quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\sigma_v^2+\sigma'^2+\frac{\sigma_{D_0}^2}{D_v^2(0)}\right\}^{1/2}\quad n=1\tag{19}$$

因为脱靶量对速度的导数大致和时间成线性关系，所以可以进行近似代换

$$\begin{matrix}D_v(t_{n-1})/D_v(t_n)=\tau_{n-1}/\tau_n\\ \theta_f-\theta_{n-1}=\pi\tau_{n-1}\end{matrix}\Rightarrow$$

$$F_3=\sum_{n=2}^{N}\left\{2+\frac{\tau_{n-1}^2}{\tau_n^2}+\frac{\sin^2(\pi\tau_{n-1})}{\sin^2(\pi\tau_n)}\right\}^{1/2}\tag{20}$$

如果能够用x近似$\sin x$那么函数可以进一步化为

$$F_3=\sum_{n=2}^{N}\left[2\left(1+\frac{\tau_{n-1}^2}{\tau_n^2}\right)\right]^{1/2}\tag{21}$$

这与二维情况一致。观察下列$\sin x$与x的比值。

$$\frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3}=0.827\ \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4}=0.900\ \frac{\sin(\pi/9)}{\pi/9}=0.980\ \frac{\sin(\pi/12)}{\pi/12}=0.989\tag{22}$$

这说明如果$\tau_{n-1}\leqslant 1/4$，$\sin x$与x的比值已相当接近，可以用x近似$\sin x$。所以三维情况下如果初始发射误差较大，可以取

$$\tau_1=1,\ \tau_2=\frac{1}{4},\ \frac{\tau_3}{\tau_2}=\frac{\tau_4}{\tau_3}=\cdots=\frac{\tau_N}{\tau_{N-1}}=\frac{1}{3}\tag{23}$$

在地火转移轨道中，转移轨道虽然和火星轨道不共面，但是抵达时相对速度矢量与标称轨道面夹角不大，所以制导问题在垂直轨道面与轨道面上只有轻微耦合，因此之前所说的情况对于近霍曼转移轨道可以看作合理近似。

2　火星探测中途制导策略

本节以2018年5月11日发射，2018年12月1日抵达火星的探测器为例，考虑在中途修正后速度误差为0.3 m/s，位置误差150 km的情况，如图1所示。

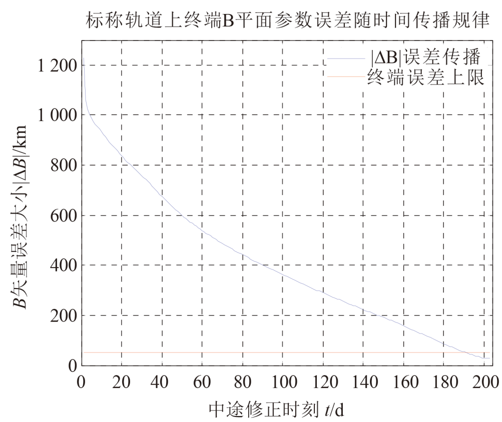

图 1　终端B平面误差随最后一次修正时间传播情况

Fig. 1　Propagation of B-Plane error according to the last correction time.

按照方程，指导修正次数为

$$N=1+\log_3\frac{1\,200}{50}\approx 4\tag{24}$$

确定最后一次中途修正时刻为图中蓝线与红线相交的位置即t_4=192 d，随后误差传播量扩大3倍，递推到t_3=162 d，以此类推有t_2=80 d以及t_1=1 d。这种情况下第1天修正的是初始发射误差，第2、3、4次修正的是前一次修正后所产生的误差。修正量平均值分别为15.4 m/s、0.235 m/s、0.277 m/s和0.299 m/s，如表3所示。

表 3 速度误差0.3 m/s情况下中途修正均值

Table 3 Mean corrections with velocity error of 0.3 m/s

m/s

修正日期	修正量
第1天	15.4
第80天	0.235 4
第162天	0.277 5
第192天	0.299 2

如果对第2次修正时间进行调整，例如分别改至第70天和第90天，那么第2次和第3次修正量如表4所示。

表 4 速度误差0.3 m/s情况下修改第2次中途修正时间对修正均值影响

Table 4 Effect on correction means by varying the 2nd midcourse correction time

m/s

第2次修正日期	第2次修正量	第3次修正量	两次总和
第70天	0.204 3	0.309 6	0.513 9
第80天	0.235 4	0.274 7	0.510 1
第90天	0.271 0	0.248 2	0.519 2

再看对第3次修正时间进行调整，例如分别改至第152天和172天，那么第3次和第4次修正量如表5所示。

表 5 速度误差0.3 m/s情况下修改第3次中途修正时间对修正均值影响

Table 5 Effect on correction means by varying the 3rd midcourse correction time

m/s

第3次修正日期	第3次修正量	第4次修正量	两次总和
第152天	0.221 8	0.371 0	0.592 8
第162天	0.274 7	0.299 2	0.573 9
第172天	0.367 9	0.228 5	0.596 4

由表4和表5可以看出，对第2次或第3次中途修正时间进行实质性修改会增加速度增量均值。

如果取消第3次修正，使得原有4次修正变成3次，考虑第2次修正时间分别是第70天、80天和90天的情况，那么第2次和第4次修正的修正量如表6所示。

如果在原第2次和第3次修正间增加一次修正，在原第3次和第4次修正间增加一次修正，取消原有第3次修正，使得原有的4次修正变成5次，把新的第3、4、5次修正分别安排在第120天、170天和192天，那么这3次修正量如表7所示。

表 6 速度误差0.3 m/s情况下变4次修正为3次修正对修正均值影响

Table 6 Effect on correction means by varying correction numbers from 4 to 3

m/s

第2次修正日期	第2次修正量	第4次修正量	两次总和
70	0.204 3	1.107 6	1.311 9
80	0.235 4	0.991 1	1.226 5
90	0.271 0	0.884 7	1.155 7

表 7 速度误差0.3m/s情况下变4次修正为5次修正对修正均值影响

Table 7 Effect on correction means by varying correction numbers from 4 to 5

m/s

修正日期	修正量
第80天	0.235 4
第120天	0.129 7
第170天	0.215 4
第192天	0.242 6

把4次修正变成5次修正后，第80~192天修正总脉冲为0.823 1 m/s。而按照Breakwell间距比方法取得的修正次数与时间，同时段的修正总脉冲为0.812 1 m/s。

如果取消第2次修正，使得原有4次修正变成3次，考虑第3次修正时间分别是第152天、162天和172天的情况，那么第3次和第4次修正的修正量如表8所示。

表 8 速度误差0.3m/s情况下变4次修正为5次修正对修正均值影响

Table 8 Effect on correction means by varying correction numbers from 4 to 5

m/s

第3次修正日期	第3次修正量	第4次修正量	两次总和
第152天	0.719 0	0.371 0	1.090 0
第162天	0.899 0	0.299 2	1.198 2
第172天	1.187 4	0.228 5	1.495 9

如果在原第1次和第2次修正间增加一次修正，使得原有的4次修正变成5次，那么新的第2、3、4次修正分别安排在第40天、80天和162天，那么这3次修正量如表9所示。

表 9 速度误差0.3 m/s情况下变4次修正为5次修正对修正均值影响

Table 9 Effect on correction means by varying correction numbers from 4 to 5

m/s

修正日期	修正量
第40天	0.134 2
第80天	0.114 7
第162天	0.277 5
第192天	0.242 6

把4次修正变成5次修正后，第80~192天修正总脉冲为0.825 6 m/s。而按照Breakwell间距比方法取得的修正次数与时间，同时段的修正总脉冲为0.812 1 m/s。

从上面算例可以看出，把4次修正变为3次和5次修

正后，修正的总脉冲都有所增加(第1次修正脉冲量未发生变化)实际上，对于修正后速度误差分别为0.03 m/s以及3.0 m/s的情况亦有类似结论和算例。

3　结　论

通过对Breakwell间距比策略的详细阐述、分析与验证，认为这种间距比策略对于在燃料最优层面上的制导策略有较好的指导意义，只要确定修正瞄准量(如B平面矢量)、终端误差容许范围与制导能力，即可初步设计修正次数与时间范围。一般而言，终端误差精度每提高3倍，修正次数就增加一次，制导能力每提升3倍，修正次数就减少一次。在具体使用上，应首先根据精度要求和制导能力确定最后一次修正时刻，然后向前递推，使得前一次修正后误差传播量与后一次修正后误差传播量成公比为1/3的等比数列，以此确定其余修正时刻，从而保证在达到终端精度前提下，整体燃料消耗最少。

经过对在2018年5月11日发射、2018年12月1日抵达火星的探测器在中途修正后速度误差为0.3 m/s的算例进行分析，可知对于根据Breakwell间距比制定的中途修正策略，无论是实质性修改中途修正时刻，还是增加或减少中途修正次数，都会导致整体燃料消耗增加。仿真算例验证了Breakwell间距比方法对于指导行星际探测中途修正策略的重要意义。

参　考　文　献

[1] Breakwell J V. Fuel requirements for crude Interplanetary Guidance[J]. Advances in Astronautical Science, 1960(5): 53–65.

[2] 杨嘉墀. 航天器轨道动力学与控制(下)[M]. 北京: 宇航出版社, 2001: 336–337.
Yang J C. Spacecraft orbital dynamics and control (2)[M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2001: 336–337.

[3] 李军锋. 基于精确动力学模型的火星探测轨道设计研究[D]. 北京: 清华大学航天航空学院, 2012.
Li J F. Research on orbit design for Mars explorer by the accurate dynamic model[D]. Beijing: Tsinghua University, 2012.

[4] 胡军, 周亮. 基于显式制导的月地返回轨道中途修正研究[J]. 中国空间科学技术, 2013, 33(5): 7–14.
Hu J, Zhou L. Midcourse correction of Moon-Earth return trajectory based on explicit guidance[J]. Chinese Space Science and Technology, 2013, 33(5): 7–14.

作者简介：
倪彦硕(1990–)，男，博士研究生。主要研究方向：轨道动力学。
通信地址：北京市海淀区清华大学蒙民伟科技大楼N904(100084)
电话：(010)62773402
E-mail：niyanshuo007@163.com

Midcourse Correction Strategy of Interplanetary Exploration with Breakwell Spacing Ratio Method

NI Yanshuo[1], SHI Weihuang[2], YANG Hongwei[1], BAOYIN Hexi[1], LI Junfeng[1]

(1. School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;
2. Shanghai Institute of Satellite Engineering, Shanghai 200240, China)

Abstract: This paper introduces Breakwell spacing ratio method in detail and derives an analytical expression between terminal error accuracy, guidance ability and the number and time of midcourse corrections. Generally speaking, one more correction is necessary for every 3 times accuracy increasing, while every 3 times improving on guidance ability can reduce one correction. In specific applications, the last correction time should be determined first according to the terminal error accuracy and guidance ability, then other correction time can be determined so that the error propagation after each correction is a geometric progression with ratio 1/3. A simulation of a Mars exploration from May 2018 to December 2018 is taken as an example to verify the validity of theoretical analysis.

Key words: Breakwell spacing ratio; midcourse correction; guidance strategy; fuel optimal

[责任编辑：杨晓燕]