

利用逃逸能量的太阳帆最快交会轨迹优化

贺 晶, 龚胜平, 李俊峰
(清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

摘 要: 讨论了运载火箭的逃逸能量产生的初始速度增量对太阳帆最短时间交会问题的影响, 将逃逸能量的影响处理为端点时刻状态方程受不等式约束的最优控制问题, 利用间接法得到了对应的两点边值问题的求解模型。结果表明, 利用该模型可以计算逃逸能量最佳的利用量, 而最优的转移轨迹并非总是对应于最大的逃逸能量, 因此合理利用逃逸能量能够有效缩短飞行时间。相对于一般的不考虑逃逸能量的太阳帆轨迹优化模型, 本文中提出的模型能够有效利用末级火箭的助推能力, 同时有效缩短了太阳帆的任务飞行时间, 对于工程应用具有更实际的参考价值。

关键词: 太阳帆; 空间交会; 逃逸能量; 轨迹优化

中图分类号: V412 **文献标识码:** A **文章编号:** 2095-7777(2014)01-0060-07

Trajectory Optimization of Solar Sail Rapid Rendezvous by Using the Escape Energy

HE Jing, GONG Shengping, LI Junfeng
(School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The effect of the initial velocity increment by escape energy on the time-optimal rendezvous problem by solar sailing is discussed. The effect of escape energy is considered as the inequality constraints on the functions of the state variables specified at the initial time, and an indirect method is used to obtain the two-point-boundary-value-problem (TPBVP) associated to the optimal control model. The results indicate that the optimal control model can be used for calculating the best escape energy usage, and the optimal trajectory is not always obtained by using the largest escape energy. Thus, a rational utilization of escape energy can shorten the transfer flight time. The model in this paper can effectively utilize the late stage rocket booster ability; and effectively shorten the solar sailing mission time as well. Therefore, it is practical and valuable for engineering application.

Key words: solar sail; space rendezvous; escape energy; trajectory optimization

0 引 言

太阳帆作为一种新型的推进方式, 利用大型的薄膜反射结构获得光压力为航天器提供推力而无需任何燃料消耗, 在深空探测任务中, 特别是在远距离、长时间、需持续提供推力的航天任务中具有显著优势。近 20 年来, 随着基础理论和支撑技术的不断发展, 太阳帆技术也取得了长足进步。作为首个成功发射的太阳帆航天器, 日本宇宙航空研究开发机构

(The Japan aerospace exploration agency, JAXA) 研制的“IKAROS 号”于 2010 年 5 月发射^[1], 也标志着太阳帆逐渐迈入了工程应用阶段。其他国家的航天机构, 如美国国家航空航天局 (National aeronautics and space administration, NASA)、欧洲航天局 (European space agency, ESA) 和德国宇航中心 (Deutsches zentrum für luft- und raumfahrt, DLR) 也不断发展各自的太阳帆技术, 并且也逐渐从地面试验进入实际发射验证阶段^[2-4]。随着太阳帆的发射和飞行获得

成功,对理论研究提出了新的挑战和需求,要求太阳帆理论研究不断更新发展从而更加贴近工程实际。

太阳帆利用光压力提供推进力,由于太阳光压强相对很小,而现有太阳帆制造技术尚不够先进,因而光压推进力一般很小,深空飞行时间相对较长。因而,有别于传统需要消耗燃料的推进方式,太阳帆的深空轨迹优化通常以飞行时间最短作为优化目标。太阳帆的深空轨迹优化研究起始于上世纪70年代,已有不少相关研究成果,其中最为著名的是1978年美国NASA提出的计划于1986年与哈雷彗星交会的任务研究^[5]。之后,多篇经典文献研究了太阳帆的间接法轨迹优化与应用,推动了太阳帆优化理论的发展^[6-10]。实际上,小推力轨迹优化是间接法的重要应用方向,其相关研究成果为太阳帆的优化研究也提供了参考^[11-13]。近年来,应用研究受到重视,利用太阳帆实现具体的深空探测任务^[14-15]。

现有的讨论太阳帆行星际转移轨迹优化问题的文献中,一般都将太阳帆从地球出发时刻的端点状态约束简化为和地球相同的日心位置和速度,很少有研究考虑太阳帆逃逸地球引力作用时的相对位置和速度对优化结果的影响。Sauer等提到利用逃逸速度增量来设计转移轨道,然而并未给出详细的分析和讨论^[6]。本文中,作者结合工程实际的需求,详细讨论了太阳帆从地球出发时考虑附加上逃逸能量 C_3 的作用,利用间接法理论推导了转移时间最短时的最优控制模型,得到了该模型对应的两点边值问题的控制方程,利用打靶法获得了数值计算的结果,分析了如何利用 C_3 来获得最优的交会转移轨迹,并给出了有意义的结论,表明最优转移轨迹并非总是对应于使用最大的逃逸能量 $C_{3\max}$ 。

1 最短时间交会优化模型

讨论太阳帆从地球出发与目标行星交会的转移轨迹优化问题。采用的太阳帆光压力模型为理想全反射的平面模型,利用光压因子 β 描述太阳帆获得光压加速能力,太阳帆在空间中的姿态定向利用锥角 α 和转角 δ 来描述,如图1所示。

其中锥角 α 定义为太阳帆面法向量 $\hat{n}$ 和入射光线方向的夹角,转角 δ 定义为太阳帆法向量 $\hat{n}$ 在垂直于轨道径向 $\hat{r}$ 的平面上投影与动量矩 $\hat{h}$ 的夹角。

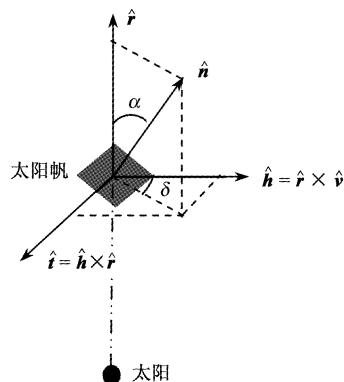


图1 太阳帆锥角和转角的定义示意图

Fig. 1 Definitions of the cone angle and the clock angle for solar sails

因此,太阳帆的帆面法向量可以用下式描述

$$\hat{n} = \cos \alpha \hat{r} + \sin \alpha \cos \delta \hat{h} + \sin \alpha \sin \delta \hat{t} \quad (1)$$

式中, $\hat{n}$ 、 $\hat{h}$ 和 $\hat{t}$ 分别沿轨道径向、轨道平面法向以及横向对应的单位矢量。特别指出,本文中矢量上加上标 $\wedge$ 表示对应的单位矢量,如 $\hat{r}$ 即表示矢径 r 的单位矢量。在此模型下,太阳帆受到的光压力沿着太阳帆面的法向方向可以用下式表示

$$\mathbf{F}_{\text{SRP}} = \beta \frac{\mu_s}{r^2} \cos^2 \alpha \hat{n} \quad (2)$$

式中, μ_s 表示太阳的引力常量, r 表示太阳帆的日心距离。

1.1 动力学方程

本文中只讨论太阳帆的日心转移轨道,在整个日心轨道的转移飞行中不考虑其他摄动力影响,因此作用于太阳帆的力将只有太阳引力和光压力,动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu_s}{r^3} \mathbf{r} + \mathbf{F}_{\text{SRP}} \end{cases} \quad (3)$$

为了计算简便,我们把太阳引力常量 μ_s 进行归一化处理,而时间和长度则相应进行无量纲化处理。无量纲化后的长度单位取为天文单位AU,对应的时间无量纲化后1年则相当于 2π 个无量纲数。则无量纲化处理后的动力学方程可以写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{V}} = -\frac{1}{R^3} \mathbf{R} + \beta \frac{1}{R^2} \cos^2 \alpha \hat{n} \end{cases} \quad (4)$$

式中, $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{V}$ 分别表示无量纲的日心位置和速度。

太阳帆需要通过改变姿态继而对轨道产生作用。对于理想的太阳帆而言,其控制变量即为太阳帆的单位法向矢量 $\hat{n}$,实际是改变式(1)定义的太阳帆姿态角 α 和 δ 。一般而言,太阳帆获得光压力时必须朝向太阳,因而控制角取值范围即容许控制集如下:

$$0^\circ \leq \alpha(t) \leq 90^\circ, 0^\circ \leq \delta(t) \leq 360^\circ \quad (5)$$

1.2 初末端点状态约束

考虑太阳帆从地球出发的星际转移交会任务,从地球出发的时刻和到达目标行星的交会时刻分别为 t_0 和 t_f ,初始和末端时刻均不固定而作为优化参数。

现有文献大多将出发时刻的状态约束按照 t_0 时刻太阳帆和地球的位置速度均相同处理,而本文将讨论出发时刻和地球具有状态偏差的情况。实际上,太阳帆要进入行星际空间的日心转移轨道,必须首先逃逸地球引力的影响。在利用圆锥曲线拼接法设计星际转移轨道时,以地球引力影响球(Sphere of influence, SOI)为边界,将轨道分为地心逃逸段和日心转移段。地心段的逃逸轨道相对于地球是双曲线轨道,太阳帆到达影响球边界时的双曲线超速 v_∞ 一般由末级火箭提供,其大小与衡量火箭发射能力的参数即逃逸能量 C_3 的关系为 $v_\infty = \sqrt{C_3}$ 。当双曲线超速的大小 $v_\infty = 0$ 时,表示航天器恰好以临界状态即抛物线轨道逃逸地球,即意味着航天器到达影响球边界时正好与地球的日心速度相同。由于航天器到达影响球边界时正好是日心转移轨道的起始,大量现有文献研究太阳帆行星际转移轨道优化时均以此条件作为初始出发速度约束。然而工程实际中,抛物线轨道逃逸并不现实,原因在于其一是精确实现不易,其二则是对末级火箭助推能力的浪费。

对于太阳帆而言,我们认为利用光压推进的起始就是到达影响球边界的时刻,之前的地心逃逸段轨道设计则不予考虑,只考虑太阳帆在地球影响球边界时的状态作为初始 t_0 时刻的状态。显然,当太阳帆双曲线超速 v_∞ 不为0时,太阳帆的实际日心转移轨道初始状态与地球的日心轨道状态均不相同,而是存在一定的位置和速度偏差。为了简化分析,本文认为太阳帆日心转移轨道初始时刻的位置状态与地球日心位置相同,而只考虑初始速度状态会受到双曲线超速不为0的影响,即忽略了与地球的初始位置偏差而只考虑初始速度偏差。这样处理具有

一定的合理性,原因在于由于地球影响球范围远远小于日心转移轨道的尺度,无论从影响球边界的任何一点出发作为日心转移轨道的初始位置,将其视为一个点即地心所在的日心位置,对后续的日心转移轨道影响不大,因而与地球的初始位置偏差可以忽略;而到达影响球边界时的速度则会对太阳帆进入日心轨道产生重大影响,在进行日心转移轨道优化时初始速度与地球速度的偏差不能忽略,也即产生双曲线超速 v_∞ 的逃逸能量 C_3 的影响不能忽略。因此,本文中我们研究的日心转移轨道初始端点的状态约束可以分别表示为初始位置等式约束和初始速度不等式约束:

$$\Psi(t_0) = \mathbf{R}(t_0) - \mathbf{R}_{\text{start}}(t_0) = 0 \quad (6)$$

$$\sigma(t_0) = |\mathbf{V}(t_0) - \mathbf{V}_{\text{start}}(t_0)| - \sqrt{C_{3\text{max}}} \leq 0 \quad (7)$$

其中,式(6)是一个三维向量等式约束方程,表示 t_0 时刻太阳帆的位置和出发行星(地球)的位置相同;式(7)则是一个标量不等式约束,表示 t_0 时刻太阳帆和地球的速度偏差即双曲线超速 $v_\infty = \mathbf{V}(t_0) - \mathbf{V}_{\text{start}}(t_0)$ 的大小不大于最大逃逸能量 $C_{3\text{max}}$ 的能力。火箭的推进能力是有限的,能提供的双曲线超速也是有限的,其中,双曲线超速的大小和逃逸能量 C_3 的关系为

$$v_\infty = \sqrt{C_3} \leq \sqrt{C_{3\text{max}}} \quad (8)$$

对于确定的航天器和火箭,最大逃逸能量 $C_{3\text{max}}$ 是一个固定的常量。本文中我们认为实际能够作用于太阳帆航天器的有效 C_3 可以在 $0 \sim C_{3\text{max}}$ 之间取值,而产生的双曲线超速 v_∞ 大小可在 $0 \sim \sqrt{C_{3\text{max}}}$ 之间优化, v_∞ 的方向不确定也需要优化。

下面考虑末端时刻 t_f 的端点状态约束,我们讨论太阳帆与目标行星的交会,这里的交会即指太阳帆在时刻 t_f 与目标行星的位置和速度均相等,因此末端状态约束可用下面的等式方程表示:

$$\Psi_R(t_f) = \mathbf{R}(t_f) - \mathbf{R}_{\text{end}}(t_f) = 0 \quad (9)$$

$$\Psi_V(t_f) = \mathbf{V}(t_f) - \mathbf{V}_{\text{end}}(t_f) = 0$$

式(9)是2个3维向量等式方程,而交会目标可以是行星或小行星等其他小天体。

由此,本文中我们要讨论的太阳帆轨迹优化问题的状态边值条件为:式(6)、(7)和(9)定义的初始端点的等式/不等式状态约束,以及末端点的等式状态约束。

1.3 最优控制律

对于太阳帆而言,转移飞行时间是需要优化的指标,因此性能指标可以表示为

$$\min J = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (10)$$

式(10)即表示优化太阳帆的出发和到达时刻,使得转移飞行时间最短。

根据最优控制理论的间接法,通过引入协态变量 $\lambda \triangleq (\lambda_R; \lambda_V)$, 构造该动力学系统的 Hamilton 函数为

$$H = 1 + \lambda_R V + \lambda_V \left(-\frac{1}{R^3} R + \beta \frac{1}{R^2} \cos^2 \alpha \hat{n} \right) \quad (11)$$

因此,可以得到协态的微分方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_R = \left[\frac{1}{R^3} \lambda_V - \frac{3}{R^5} (R \cdot \lambda_V) R - \right. \\ \quad \left. 2\beta \frac{1}{R^3} \cos \alpha (\lambda_V \cdot \hat{n}) \left(\hat{n} - 2 \cos \alpha \frac{R}{R} \right) \right] \\ \dot{\lambda}_V = -\lambda_R \end{cases} \quad (12)$$

根据经典变分法理论,最优性条件即等价于使 Hamilton 函数(11)取极小值,可以得到控制变量的最优控制律为

$$\begin{cases} \alpha^* = \begin{cases} \arctan \left(\frac{3 + \sqrt{9 + 8 \tan^2 \tilde{\alpha}}}{4 \tan \tilde{\alpha}} \right), & \tilde{\alpha} < 90^\circ \\ \arctan \left(\frac{3 - \sqrt{9 + 8 \tan^2 \tilde{\alpha}}}{4 \tan \tilde{\alpha}} \right), & \tilde{\alpha} > 90^\circ \end{cases} \\ \delta^* = 180^\circ + \tilde{\delta} \end{cases} \quad (13)$$

式中, $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\delta}$ 定义为主矢量 $\hat{\lambda}_V$ (速度协态)^[11] 的方向,形式和帆面法向量的定义类似,如下式所示

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_V &= \cos \tilde{\alpha} \hat{r} + \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\delta} \hat{h} + \sin \tilde{\alpha} \sin \tilde{\delta} \hat{i} \\ (0^\circ \leq \tilde{\alpha} \leq 180^\circ, 0^\circ \leq \tilde{\delta} < 360^\circ) \end{aligned} \quad (14)$$

再根据姿态角的定义式(1),可以得到太阳帆的最优法向量满足下式

$$\hat{n}^* = \frac{\sin(\tilde{\alpha} + \alpha)}{\sin \tilde{\alpha}} \hat{r} - \frac{\sin \alpha}{\sin \tilde{\alpha}} \hat{\lambda}_V \quad (15)$$

可见最优法向量 $\hat{n}^*$ 在太阳帆的位置矢量 $\hat{r}$ 和主矢量 $\hat{\lambda}_V$ 的平面内,如图2所示。

1.4 横截条件和静态条件

第1.2节给出了优化问题的状态边值条件,其中包括了初、末时刻的位置和速度状态约束,既有等

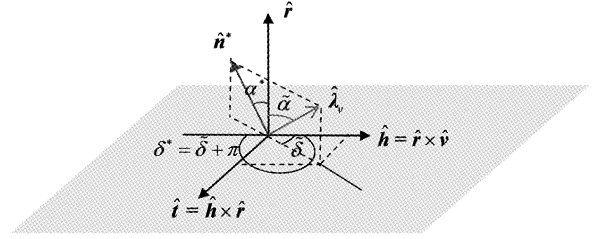


图2 最优帆面法向量 $\hat{n}^*$ 示意图

Fig. 2 The optimal normal vector $\hat{n}^*$

式约束也有不等式约束。对于式(7)给出的不等式约束,包含了两种情况,即分别取严格不等号和取等号。也可以按照这两种情况来分别处理,如下式所示

$$\sigma_1(t_0) = |V(t_0) - V_{\text{start}}(t_0)| - \sqrt{C_{3\text{max}}} < 0$$

或

$$\Psi_1(t_0) = |V(t_0) - V_{\text{start}}(t_0)| - \sqrt{C_{3\text{max}}} = 0$$

(16)

根据变分法理论和端点状态约束可以得到协态的端点条件即横截条件,以及 Hamilton 函数在初、末端点时刻满足的静态条件,而不同的端点状态约束会得到不同的横截和静态条件,从而将最优控制问题转化为两点边值问题,数值上采用打靶法即可求解。

1.4.1 取严格不等号情况

此时,初始端点的速度约束为

$$\sigma_1(t_0) = |V(t_0) - V_{\text{start}}(t_0)| - \sqrt{C_{3\text{max}}} < 0 \quad (17)$$

由于上式是严格不等号成立,我们可以认为不等号不起作用,将其当做速度无约束处理^[16]。这样优化问题只包含初始端点的位置和末端点的位置速度等式约束,如式(6)和式(9)所示。则横截条件和静态条件分别为

$$\begin{cases} \lambda_R(t_0) = -\frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial R^T(t_0)} \gamma_{R_0} = -\gamma_{R_0} \\ \lambda_V(t_0) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \lambda_R(t_f) = \frac{\partial \Psi(t_f)}{\partial R^T(t_f)} \gamma_{R_f} = \gamma_{R_f} \\ \lambda_V(t_f) = \frac{\partial \Psi(t_f)}{\partial V^T(t_f)} \gamma_{V_f} = \gamma_{V_f} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} H(t_0) &= \gamma_{R_0} \cdot \frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial t_0} = -\gamma_{R_0} \cdot V_{\text{start}}(t_0) = \\ &\lambda_R(t_0) \cdot V_{\text{start}}(t_0) \end{aligned} \quad (20)$$

$$H(t_f) = -\gamma_{R_f} \frac{\partial \Psi_R(t_f)}{\partial t_f} - \gamma_{V_f} \frac{\partial \Psi_V(t_f)}{\partial t_f} =$$

$$\gamma_{R_f} V_{\text{end}}(t_f) + \gamma_{V_f} \left[-\frac{R_{\text{end}}(t_f)}{R_{\text{end}}^3(t_f)} \right] =$$

$$\lambda_R(t_f) V_{\text{end}}(t_f) - \lambda_V(t_f) \frac{R_{\text{end}}(t_f)}{R_{\text{end}}^3(t_f)} \quad (21)$$

式中, γ_{R_0} 、 γ_{R_f} 和 γ_{V_f} 分别为拉格朗日矢量乘子。这样即得到了两点边值问题所需的控制方程, 采用打靶方程即可求解。

需要注意的是, 在式(18)中, 初始端点 t_0 时刻的速度协态(主矢量)为 $\mathbf{0}$:

$$\lambda_V(t_0) = \mathbf{0} \quad (22)$$

则代表初始时刻的主矢量方向任意, 而根据第1.3节中的最优性条件(13)和(15), 则无法确定初始时刻的控制变量, 因此打靶求解无法有效进行积分的初始化。然而, 对于本文中我们讨论的对象而言, 积分的正逆向是等效的, 并不影响结果的求取。因此, 采用逆向处理方法, 以 t_f 时刻作为初值, 从 t_f 向 t_0 时刻逆向积分。因此, 打靶求解时需要猜测的变量包括: 初始和末端时刻 t_0 和 t_f 、在 t_f 时刻端点协态 $\lambda_R(t_f)$ 和 $\lambda_V(t_f)$ 共8个变量, 而判断打靶终止的方程则包括: 在 t_0 时刻位置状态约束式(6)、在 t_0 时刻协态主矢量方程式(22)、在 t_0 和 t_f 时刻的静态条件和式(20)和式(21), 共8个。

1.4.2 取等号情况

此时, 初始端点的速度约束为

$$\Psi_1(t_0) = |\mathbf{V}(t_0) - \mathbf{V}_{\text{start}}(t_0)| - \sqrt{C_{3\text{max}}} = 0 \quad (23)$$

式(23)是一个标量等式约束方程, 即最优速度大小的偏差正好等于最大逃逸能量 $C_{3\text{max}}$ 时的双曲线超速, 只需优化 $\mathbf{v}_\infty$ 的方向。此时, t_0 时刻横截条件变为

$$\begin{cases} \lambda_R(t_0) = -\frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial \mathbf{R}^T(t_0)} \gamma_{R_0} = -\gamma_{R_0} \\ \lambda_V(t_0) = -\frac{\partial \Psi_1(t_0)}{\partial \mathbf{V}(t_0)} \gamma_{V_0} = \\ -\gamma_{V_0} \frac{\mathbf{V}(t_0) - \mathbf{V}_{\text{start}}(t_0)}{|\mathbf{V}(t_0) - \mathbf{V}_{\text{start}}(t_0)|} \end{cases} \quad (24)$$

式中, γ_{R_0} 为矢量乘子, 而 γ_{V_0} 为拉格朗日常值标量乘子。而 t_f 时刻的横截条件不变, 仍然为式(19)。根据式(24)可知, 双曲线超速 $\mathbf{v}_\infty$ 的矢量方向恰好

和主矢量 $\lambda_V(t_0)$ 共线。

在 t_0 时刻的静态条件变为下式:

$$H(t_0) = \gamma_{R_0} \frac{\partial \Psi(t_0)}{\partial t_0} + \gamma_{V_0} \frac{\partial \Psi_1(t_0)}{\partial t_0} =$$

$$-\gamma_{R_0} V_{\text{start}}(t_0) -$$

$$\gamma_{V_0} \frac{\mathbf{V}(t_0) - \mathbf{V}_{\text{start}}(t_0)}{|\mathbf{V}(t_0) - \mathbf{V}_{\text{start}}(t_0)|} \left(-\frac{R_{\text{start}}(t_0)}{R_{\text{start}}^3(t_0)} \right) =$$

$$\lambda_R(t_0) V_{\text{start}}(t_0) + \lambda_V(t_0) \left(-\frac{R_{\text{start}}(t_0)}{R_{\text{start}}^3(t_0)} \right) \quad (25)$$

而 t_f 时刻的静态条件不变, 仍然为式(21)。

此时的打靶方程需要猜测的变量包括: 初始和末端时刻 t_0 和 t_f 、初始 t_0 时刻端点协态 $\lambda_R(t_0)$ 和 $\lambda_V(t_0)$, 共8个变量, 而判断打靶终止的方程则包括: 在 t_f 时刻状态约束式(9)、在 t_0 和 t_f 时刻的静态条件式(25)和式(21), 共8个。需要注意的是, 虽然初始 t_0 时刻的速度 $\mathbf{V}(t_0)$ 方向也未知, 但是根据式(24)中双曲线超速的矢量方向恰好和主矢量共线, 即

$$\frac{\mathbf{V}(t_0) - \mathbf{V}_{\text{start}}(t_0)}{|\mathbf{V}(t_0) - \mathbf{V}_{\text{start}}(t_0)|} = \frac{\lambda_V(t_0)}{|\lambda_V(t_0)|} \quad (26)$$

而速度大小根据式(23)可得 $|\mathbf{V}(t_0) - \mathbf{V}_{\text{start}}(t_0)| = \sqrt{C_{3\text{max}}}$, 因此只要有主矢量 $\lambda_V(t_0)$ 的方向即可获得 t_0 时刻的速度 $\mathbf{V}(t_0)$ 。

根据第1.3节和第1.4节的内容, 即可求解考虑逃逸能量 C_3 作用的太阳帆最快交会轨迹优化问题, 其中逃逸能量 C_3 的作用由非严格不等式控制。在实际应用中, 对于最大值 $C_{3\text{max}}$ 给定的问题, 需要分别针对严格不等式和等式两种情况的进行优化求解, 再将两种情况的结果进行对比, 比较二者的转移飞行时间, 从而得到最快的交会转移结果以及对应所需的最优的逃逸能量 C_3 。

2 算例

根据第1节讨论的优化模型, 下面给出数值算例进行分析。算例中, 太阳帆从地球出发, 与主带小行星 1219 Britta 交会, 太阳帆光压因子取为 $\beta = 0.1265$ 。假设地球和小行星均为二体运动, 且参考轨道根数如表1所示, 其中参考时刻为儒略日 56000.00MJD。

表 1 地球和小行星的参考轨道根数

Table 1 The reference orbital elements of the Earth/asteroid

项目	a/AU	e	i/rad	Ω/rad	ω/rad	f/rad
地球	1.0008	0.0165	0.0000	0.0309	1.7192	0.9493
小行星 1219 Britta	2.2133	0.1241	0.0770	0.7432	0.4142	3.3124

简便起见,这里将出发时刻限定为 MJD58484.0 至 MJD59580.0 之间的结果进行比较分析,分别取最大 $C_{3\max}$ 的值为(0,10,20,30,40) ($\text{km}^2 \cdot \text{s}^{-2}$),按照第 1.4 节的等式约束求解和无约束求解,结果分别如表 2 所示。

表 2 当 $C_3 = C_{3\max}$ 初始速度等式约束下最优结果

Table 2 The optimal results of $C_3 = C_{3\max}$ for initial velocity equality constraint

$C_{3\max}$ / $(\text{km}^2 \cdot \text{s}^{-2})$	从地球出发 /MJD	与 1219 交会 /MJD	飞行时间 /年
0	59566.6	60606.3	2.85
10	59196.5	60129.9	2.56
20	58793.5	59978.0	3.24
30	59448.8	60881.1	3.92
40	59532.5	61312.1	4.87

可见,按照初始速度等式约束计算,即当实际利用的 $C_3 = C_{3\max}$ 时,可以发现最优结果与 C_3 大小的关系,即飞行时间先逐渐缩短再增长,在 0 ~ 40 之间存在某个值使得实际的 C_3 取该值时飞行时间能够最短。

下面按照第 1.4 节的无初始速度约束优化最优轨迹,并计算对应的实际利用的 C_3 大小,结果如表 3 所示。

表 3 当 $C_3 < C_{3\max}$ 无初始速度约束下最优结果

Table 3 The optimal results of $C_3 < C_{3\max}$ for no-initial velocity constraint

最优 C_3 / $(\text{km}^2 \cdot \text{s}^{-2})$	从地球出发 /MJD	与 1219 交会 /MJD	飞行时间 /年
18.12	59200.5	60129.5	2.54

可见,最短飞行时间为 2.54 年,最优的 $C_3 = 18.12 (\text{km}^2 \cdot \text{s}^{-2})$, 确实在 0 ~ 40 ($\text{km}^2 \cdot \text{s}^{-2}$) 之间。至此,我们可以得到以下结果:当 $C_{3\max} > 18.12 (\text{km} \cdot \text{s}^{-2})$ 时,最优解出现在 $C_3 = 18.12 (\text{km}^2 \cdot \text{s}^{-2})$ 时;而当 $C_{3\max} < 18.12 (\text{km} \cdot \text{s}^{-2})$ 时,最优解则出现在 $C_3 = C_{3\max}$ 时。需要注意的是,这种数值结果只适用于本算例,但是计算方法则具有参考意义,对于不同的算例情况,即可按照本文的方法,分别按照等式约束计算 $C_3 = C_{3\max}$ 时的结果和无约束下的结果,将二者进行比较从而选取最优解。

通过本算例,可以看出,逃逸能量 C_3 的作用并非始终减少交会飞行时间,然而合理的利用 C_3 则能够有效缩短飞行时间,图 3 给出了 $C_3 = 0$ 和 $C_3 = 18.12 (\text{km}^2 \cdot \text{s}^{-2})$ (最优) 时的转移轨迹对比,可以明显看出,按照本文的模型和方法能够得到最合理的逃逸能量 C_3 的利用方案。从轨迹对比图 3(a) 可

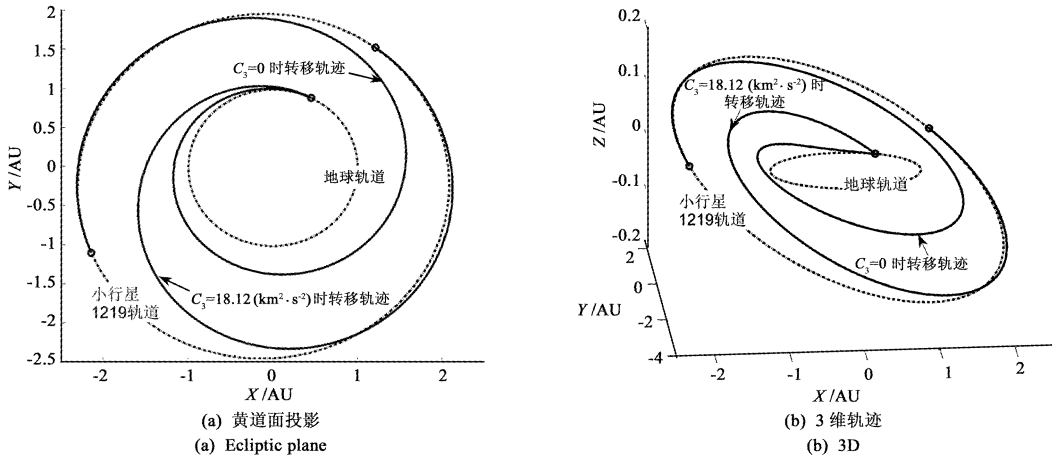


图 3 当 $C_3 = 0$ 和 C_3 为最优时的轨迹对比

Fig. 3 The trajectory comparison of $C_3 = 0$ and optimal C_3

以看出,当使用了最优的 C_3 时,太阳帆从地球出发的时刻与未利用 C_3 的出发时刻接近,但是由于初始利用了 C_3 提供的初始速度增量,从而使得太阳帆出发后迅速接近交会目标行星的轨道平面,这体现了逃逸能量 C_3 的有利效果之一,即从图 3(b) 可以明显看出缩小了与目标行星轨道倾角之间的差别,因而有效缩短了太阳帆的交会飞行时间。

3 结 论

逃逸能量 C_3 对太阳帆轨迹优化的影响可以转化为初始时刻的端点不等式状态约束,需要分解为严格不等式和等式约束两种情况分别讨论。结果表明, C_3 的考虑与否对于太阳帆的轨迹优化结果有较大影响,产生的影响可能是有利于缩短飞行时间,也可能是反向效果延长了飞行时间;文中给出的一个重要结论则是,最优的轨迹并非总是对应使用最大值 $C_{3\max}$,此结论对工程应用特别是任务规划和轨迹设计时具有一定参考价值;而合理地利用 C_3 能够有效缩短飞行时间,本文中提出的模型和方法能够有效求解出 C_3 的最优利用方案从而显著缩短太阳帆飞行时间。文中讨论的内容利用了经典的最优控制理论和求解方法,将太阳帆的轨迹优化研究向更符合工程实际方面进行了探讨,对于理论研究和工程应用均具有一定的参考价值。

参 考 文 献

- [1] Tsuda Y, Mori O, Funase R, et al. Flight status of IKAROS deep space solar sail demonstrator[J]. *Acta Astronautica*, 2011, 69(9): 833–840.
- [2] Johnson L, Whorton M, Heaton A, et al. NanoSail-D: a solar sail demonstration mission[J]. *Acta Astronautica*, 2011, 68(5): 571–575.
- [3] Johnson L, Young R, Barnes N, et al. Solar sails: technology and demonstration status[J]. *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 2012, 13: 421–427.
- [4] Geppert U, Biering B, Lura F, et al. The 3-step DLR-ESA Gossamer road to solar sailing[J]. *Advances in Space Research*, 2011, 48(11): 1695–1701.
- [5] Friedman L, Carroll W, Goldstein R, et al. Solar sailing-the concept made realistic[J]. *AIAA Paper* 78–82, Jan. 1978.
- [6] Sauer C G. Optimum solar – sail interplanetary trajectories[J]. *AIAA Paper* 76–792, San Diego, CA, Aug. 18–20, 1976.
- [7] Zhukov A N, Lebedev V N. Variational problem of transfer between heliocentric orbits by means of a solar sail[J]. *Kosmicheskie Issledovaniya (Cosmic Research)*, 1964, 2: 45–50.
- [8] Jayaraman T S. Time-optimal orbit transfer trajectory for solar sail spacecraft[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1980, 3(6): 536–542.
- [9] Wood L J, Bauer T P, Zondervan K P. Comment on time-optimal orbit transfer trajectory for solar sail spacecraft[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1982, 5(2): 221–224.
- [10] Cassenti B. Optimization of interstellar solar sail velocities[J]. *Journal of the British Interplanetary Society*, 1997, 50(12): 475–478.
- [11] Lawden D F. Optimal trajectories for space navigation[M]. London: Butterworths, 1963, 54–68.
- [12] Casalino L, Colasurdo G, Pastrone D. Indirect approach for minimum-fuel aeroassisted transfers[C]. San Diego: AIAA/AAS Astrodynamics Conference, 1996.
- [13] Jiang F, Baoyin H, Li J. Practical techniques for low-thrust trajectory optimization with homotopic approach[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(1): 245–258.
- [14] Hughes G W, Macdonald M, McInnes C R, et al. Sample return from Mercury and other terrestrial planets using solar sail propulsion[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2006, 43(4): 828–835.
- [15] Mengali G, Quarta A A. Rapid solar sail rendezvous missions to asteroid 99942 Apophis[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2009, 46(1): 134–140.
- [16] Grigoriev I S, Zapletin M P. Constructing pontryagin extremals for the optimal control problem of asteroid fly-by[J]. *Automation and Remote Control*, 2009, 70(9): 1499–1513.

作者简介:

李俊峰(1964–),男,教授,博士生导师,主要研究方向为航天器动力学和控制。

通信地址:清华大学航天航空学院(100084)

电话:(010)62773402

E-mail:lijunf@tsinghua.edu.cn

(责任编辑:宋宏)